ANyP, Práctica 2b.

Errores.

Definiciones básicas.

Sea $\tilde{x}$ un valor aproximado de una cantidad cuyo valor exacto es x.

- El *error absoluto* de $\tilde{x}$ se define como

$$\Delta = x - \tilde{x}.$$

- El *error relativo* de $\tilde{x}$, como

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x} \quad (x \neq 0).$$

- Y el *error porcentual* como $100\,\dfrac{\Delta}{x}$.

✍ En general no conocemos el valor verdadero y por lo tanto, tampoco el error real. La situación típica es que tenemos una *estimación* del error dada por una *cota* positiva al tamaño máximo del error. Es importante remarcar la diferencia entre el error, el cual puede ser positivo o negativo, y una cota de error positiva ϵ para la magnitud del error absoluto o δ para la magnitud del error relativo:

$$|\Delta| \leq \epsilon, \qquad \frac{|\Delta|}{|x|} \leq \delta.$$

En la práctica, sólo tales cotas pueden ser determinadas.

✍ En la práctica suele utilizarse la notación $x = \tilde{x} \pm \epsilon$ para indicar que $|x - \tilde{x}| \leq \epsilon$.

✍ Usualmente, el error relativo no puede ser calculado directamente puesto que x es una cantidad desconocida. Sin embargo, en tanto el error relativo sea pequeño, se puede estimar su magnitud a partir de considerar $|\Delta|/|x| \simeq |\Delta|/|\tilde{x}|$.

Ejercicio 1. Estimar los errores absolutos, relativos y porcentuales que se comenten al tomar como valores de π, :

a) $22/7$, b) $333/106$, c) $355/113$.

Considerando como valor "exacto" $\pi = 3.141592654$.

Ejercicio 2. Calcular el error absoluto que se comete cuando se adopta como valor del área de un rectángulo de lados a y b, el área del cuadrado que tiene como lado el promedio de a y b.

Ejercicio 3. En 1862 el físico Foucault, utilizando un espejo giratorio, calculó en $298\,000\,km/s$ la velocidad de la luz. Aceptando como exacta la velocidad de $299\,776\,km/s$, estimar el error absoluto y el error relativo cometido por Foucault.

Por otra parte, la determinación de la constante universal h realizada por Planck en 1913 dio el valor de $6.41 \times 10^{-27}\,erg\,seg$. Adoptando el valor de $6.623 \times 10^{-27}\,erg\,seg$, estimar el error absoluto y relativo cometido por Planck. ¿Cual medida es más precisa?

Error absoluto vs. error relativo.

Lo que en realidad interesa en las mediciones no es tanto el error absoluto, sino el error relativo; esto es, la relación de aquel error con respecto a la magnitud en cuya determinación se ha cometido el error.

Número de decimales correctos, dígitos significativos y redondeo.

Cuando se indica el *número de dígitos* de un valor numérico no se cuentan los posibles ceros localizados al comienzo del número, puesto que los mismos solo ayudan a indicar la localización del punto decimal. Por el contrario, si se indica el *número de decimales*, entonces debe contarse aquellos ceros iniciales que estén a la derecha del punto decimal. Por ejemplo, el número 0.00147 está dado con tres dígitos pero tiene cinco decimales, mientras que el número 13.24 está dado con cuatro dígitos y solo dos decimales.

- Se dice que el número $\tilde{x}$ aproxima a x con t *decimales correctos* si t es el entero no negativo más grande para el cual,

$$|x - \tilde{x}| < \frac{1}{2} \times 10^{-t}.$$

- Se dice que el número $\tilde{x}$ aproxima a x con t *dígitos o cifras significativas* si t es el entero no negativo más grande para el cual,

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} < \frac{1}{2} \times 10^{1-t} = 5 \times 10^{-t}.$$

✍ En virtud de estas definiciones, el número de decimales correctos da una idea de la magnitud del error absoluto, mientras que el número de dígitos significativos da una idea de la magnitud del error relativo.

Dado un número x existen dos maneras de *redondear* el número a, digamos, t decimales:

- En el *truncamiento* o *cortado* simplemente se descartan todos los decimales ubicados a la derecha del $t-$ésimo decimal para obtener $\widetilde{x}$. Procediendo de esta manera el error cometido tiene, sistemáticamente, el mismo signo que el número y su magnitud está acotada por $|x - \widetilde{x}| \leq 10^{-t}$.

- En el *redondeo simétrico*, si el $(t+1)-$ésimo decimal es menor que 5 dejamos el t-ésimo decimal sin cambiar y eliminamos los siguientes, pero si el $(t+1)-$ésimo decimal es mayor o igual que 5 sumamos 1 al t-ésimo decimal. Los errores obtenidos resultarán positivos o negativos casi por igual, y una cota para el error cometido está dada por $|x - \widetilde{x}| \leq \frac{1}{2}10^{-t}$.

Ejercicio 4. Mostrar que 0.001234 ± 0.000004 tiene cinco decimales correctos y tres dígitos significativos, mientras que 0.001234 ± 0.000008 tiene cuatro decimales correctos y dos dígitos significativos.

Ejercicio 5. Redondear π a cuatro decimales empleando el cortado y el redondeo simétrico.

Propagación de errores.

Nos interesa analizar como se propaga el error al efectuar operaciones aritméticas con aproximaciones.

Ejercicio 6. Mostrar que al operar con las aproximaciones $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ a los valores verdaderos x e y, respectivamente, se cumplen las siguientes reglas sobre los errores absolutos o relativos de las respectivas operaciones:

$$\begin{aligned}
\Delta(x+y) &= \Delta x + \Delta y, \\
\Delta(x-y) &= \Delta x - \Delta y, \\
\frac{\Delta(x \cdot y)}{x \cdot y} &\simeq \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}, \\
\frac{\Delta(x/y)}{x/y} &\simeq \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7. Mostrar que *en la adición y sustracción, una cota para el error absoluto del resultado está dada por la suma de las cota de los errores absolutos de los operandos*

$$|\Delta(x \pm y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|,$$

mientras que *en la multiplicación y división, una cota del error relativo está dada, aproximadamente, por la suma de las cotas de los errores relativos de los operandos*,

$$\begin{aligned}
\frac{|\Delta(x \cdot y)|}{|x \cdot y|} &\lesssim \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}, \\
\frac{|\Delta(x/y)|}{|x/y|} &\lesssim \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. Mostrar que el error relativo en la diferencia de dos números aproximadamente iguales puede ser muy grande, aún cuando los dos números tengan errores pequeños (*fenómeno de cancelación*). Considerar como ejemplo $x = 0.5764 \pm 0.5 \times 10^{-4}$ e $y = 0.5763 \pm 0.5 \times 10^{-4}$.

Consideremos ahora el caso general de una relación funcional $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para ciertas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Una cota para el error absoluto $\Delta z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)$ al estimar z con el valor aproximado $\widetilde{x}_i$ de x_i con error Δx_i, para $i = 1, \ldots, n$, está dada por la siguiente *fórmula fundamental* del cálculo de errores:

$$|\Delta z| \lesssim \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|_{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)} |\Delta x_i|.$$

✍ La cantidad $|\partial z / \partial x_i|$ puede ser interpretada como una medida de la sensibilidad de z frente a una perturbación Δx_i en el argumento x_i.

✍ En los usos prácticos de la fórmula, $|\partial z/\partial x_i|$ se estima evaluándola en el punto aproximado $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)$, con lo que no se tiene, en estas circunstancias, una cota estricta del error.

Ejercicio 9. Mostrar que el error relativo de la raíz cuadrada de un número es inferior a la mitad de una cota superior del error relativo del radicando.

Ejercicio 10. Mostrar que una cota para error relativo en el volumen de una esfera de radio R es tres veces el error relativo con que ha sido medido el radio R.

Problema directo e inverso de errores.

La determinación del error de un valor obtenido como resultado de operaciones sobre cantidades cuyos errores se conocen, constituye el *problema directo* del cálculo de errores. Por otra parte, la estimación de los errores de los valores que intervienen en una cantidad de manera de que ésta sea calculada con un error prefijado, constituye el *problema inverso* del cálculo de errores. La solución de estos problemas se apoyan en las fórmulas de propagación de errores.

Ejercicio 11. La distancia aérea media entre Ushuaia y Puerto Iguazú es 3535 kilómetros, pero puede ser 120 kilómetros más larga o más corta debido a variaciones en la ruta. La velocidad de crucero de un avión dado es de 930 km/h, pero puede variar hasta en 100 km/h en exceso o en defecto a causa de los vientos. ¿Cuales son los límites mínimo y máximo de duración del vuelo?

Ejercicio 12. Determinar el valor y el error cometido en el cálculo del volumen de un cubo de lado $l = 7.3$ cm medido con un error menor que medio milímetro. ¿Cuántos decimales correctos tiene el volumen calculado? ¿cuántas cifras significativas?

Ejercicio 13. Supongamos que se han determinado los siguientes valores para dos lados y un ángulo de un triángulo ABC:

$$b = 465.24\,m, \quad c = 404.63\,m, \quad \alpha = 48°25'10''.$$

Los lados se han determinado con errores absolutos inferiores a $0.05\,m$ y el ángulo con un error absoluto inferior a $10''$. El área del triángulo se calcula según la fórmula $A = \frac{1}{2} b\, c \operatorname{sen} \alpha$. Estimar el valor de dicha área y el error cometido.

Ejercicio 14. Se desea calcular el volumen de un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas miden aproximadamente $x = 35\,cm$, $y = 40\,cm$, $z = 45\,cm$, con un error menor que $50\,cm^3$. ¿Con qué aproximación deben medirse las aristas?

Ejercicio 15. Se desea calcular con una aproximación del 0.1% la superficie de un círculo cuyo radio mide aproximadamente $25\,cm$. ¿Con qué aproximación debe medirse el radio y cuantos decimales de π será necesario considerar?