PRACTICA 4
Interpolación polinómica.

Un ingeniero, un matemático y un físico se van a cazar ciervos. Cuando ven uno, el físico dispara y el tiro sale desviado a la izquierda. Dispara a continuación el ingeniero y su disparo se desvía a la derecha. Entonces le pregunta al matemático si va a disparar y este dice: "Para qué... prefiero interpolar".

Interpolación polinómica. Fórmula de Lagrange. Dada una función $f(x)$ cuyos valores son conocidos en $n+1$ puntos *distintos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, existe un único polinomio $p(x)$ de grado a lo más n tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Tal polinomio interpolante puede ser expresado explícitamente por la *fórmula de interpolación de Lagrange*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x), \quad L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

Una cota para el error cometido en la interpolación puede ser obtenida del hecho de que si f es una función con derivada continua hasta el orden $n+1$ sobre un intervalo $[a, b]$ que contiene a los puntos de la malla $x_0, \ldots, x_n$, entonces para $x \in [a, b]$ existe un $\zeta = \zeta(x)$ en el intervalo más pequeño que contiene a los puntos $x_0, \ldots, x_n, x$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Ejercicio 1. Mostrar que la interpolación lineal de f a través de los puntos x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) está dada por

$$p(x) = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{(x_2 - x_1)},$$

y que el error cometido en dicha interpolación, para $x_1 < x < x_2$, está acotado por

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{8}(x_2 - x_1)^2,$$

donde M es una cota para la derivada segunda de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Ejercicio 2. Se tiene que preparar una tabla para la función $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$. Si a cada valor se lo da con cinco cifras decimales, ¿qué valor debe tener la diferencia de valores adyacentes de x, es decir, el tamaño del paso h de la tabla, para que el error absoluto de la interpolación lineal sea a lo más 10^{-5}?

Interpolación iterada de Neville. El siguiente procedimiento permite evaluar eficientemente el polinomio interpolante en un punto $x = \xi$ particular *sin necesidad de construir explícitamente el polinomio.* Dados los $(n+1)$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_n$ denotamos por $Q_{i,j}$, $i \geq j$, al polinomio interpolante de grado j en los $(j+1)$ puntos $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$.

Algoritmo de interpolación iterada de Neville

Para evaluar en el punto $x = \xi$ el polinomio $p(x)$ que interpola a la función f en los $(n+1)$ puntos $x_0, \ldots, x_n$.

Para $i = 0, 1, \ldots, n$
  Tomar $Q_{i,0} = f(x_i)$
  Para $j = 1, 2, \ldots, i$
    Calcular $Q_{i,j} = \dfrac{(\xi - x_{i-j})\, Q_{i,j-1} - (\xi - x_i)\, Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
Entonces $Q_{n,n} = p(\xi)$.

El algoritmo construye así una tabla "triangular" fila por fila, donde la respectiva columna es calculada recursivamente a partir de sus dos "vecinos" en la columna previa según la fórmula dada. Por ejemplo, para cinco nodos, el valor del polinomio interpolante es obtenido en $Q_{4,4}$ según el siguiente esquema.

x_0	$Q_{0,0}$				
x_1	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$			
x_2	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$		
x_3	$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	
x_4	$Q_{4,0}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$

Ejercicio 3. Implemente el método de Neville como un programa FORTRAN. *Indicación*: Nótese que como la tabla se construye fila por fila, solo dos filas necesitan ser guardadas en memoria.

Ejercicio 4. Aproxime $\sqrt{3}$ usando el método de Neville en la función $f(x) = 3^x$ para los valores $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_3 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Ejercicio 5. La interpolación del siguiente conjunto de datos debería conducir a una aproximación de la función raíz cuadrada.

x_i	0	1	4	9	16
y_i	0	1	2	3	4

Estimar los valores de $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{15}$ considerando:

a) El polinomio de grado cuatro que interpola los cinco datos de la tabla.

b) El polinomio lineal que interpola a los dos valores más próximos de la tabla.

¿Cuales aproximaciones son mejores?

¿Que valores obtiene si considera *extrapolar* los cinco datos de la tabla para estimar, por ejemplo, $\sqrt{25} = 5$ ó $\sqrt{64} = 8$?

Ejercicio 6. Fenómeno de Runge. Considere el polinomio interpolante de grado 10 de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25\, x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

sobre los puntos $x_i = -1 + \dfrac{2\,(i-1)}{10}$, $i = 1, \ldots, 11$. Calcule el error absoluto y relativo en los puntos intermedios a dichos puntos. Grafique y comente los resultados obtenidos.