PRACTICA 6

Espacios vectoriales.

Un matemático y un físico van a una conferencia sobre la teoría de Kaluza-Klein involucrando espacios de 9 dimensiones. El físico al rato se pierde en la charla, pero el matemático parece interesado, así que el físico le pregunta:
– ¿Cómo puedes entender todo ésto?
– Es fácil, todo es cuestión de visualizarlo.
– Pero ¿cómo visualizas un espacio de nueve dimensiones?
– Visualizo un espacio de dimensión N y luego hago $N = 9$.

Espacios vectoriales. A lo largo de la matemática se encuentras muchos ejemplos de objetos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por escalares, los cuales pueden englobarse en un concepto matemático general, llamado *espacio vectorial.* Brevemente un espacio vectorial es un conjunto V de elementos cualesquiera sobre el cual pueden realizarse ciertas operaciones llamadas de *suma* y *multiplicación por escalares* las cuales satisfacen ciertos axiomas particulares discutidos en la teoría.

Ejercicio 1. Dado el conjunto V con sus respectivas operaciones, mostrar que constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares K siendo K el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el de los números complejos $\mathbb{C}$.

a) $V = K^n$ el conjunto de las n-uplas $(x_1, \dots, x_n)$ de elementos de K, siendo la suma de $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ la n-upla $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$; y el producto de un escalar k por x, la $n-$upla $kx = (kx_1, \dots, kx_n)$. Interpretar geométricamente los espacios vectoriales $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

b) $V = K^{m\times n}$, el conjunto de todas las matrices de m filas por n columnas sobre el cuerpo K. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices de $K^{m\times n}$, la suma de A y B es la matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ y el producto de un escalar k por la matriz A es la matriz $kA = (ka_{ij})$

c) $V = K[x]$ el conjunto de todos los polinomios $p = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ en una indeterminada, con coeficientes $a_i \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, con la suma usual de polinomios y el producto con elementos de K.

d) Sea X un conjunto no vacío, y sea $V = K^X$ el conjunto de todas las funciones de X en K, $K^X = \{f / f : X \to K\}$. Si f y $g \in K^X$ la suma de f y g es la función $f + g$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in K$, y el producto de $k \in K$ por f es la función kf tal que $(kf)(x) = kf(x)$ para todo $x \in K$. Este espacio K^X se conoce como *espacio de funciones del conjunto X en el cuerpo K con operaciones punto a punto.*

Ejercicio 2. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Probar que

a) Para todo escalar $k \in K$ y $0 \in V$, $k0 = 0$.

b) Para $0 \in K$ y todo vector $x \in V$, $0x = 0$.

c) Si $kx = 0$, donde $k \in K$ y $x \in V$, entonces $k = 0$ ó $x = 0$.

d) Para todo $k \in K$ y todo $x \in V$, $(-k)x = k(-x) = -kx$.

Subespacios. Un subconjunto S de V es un *subespacio* de V si es a su vez un espacio vectorial sobre K con respecto a las operaciones de V. Las condiciones necesarias y suficientes para que S sea un subespacio de V son que (i) $0 \in S$, (ii) $kx + y \in S$, para todo $x, y \in S$ y $k \in K$.

Ejercicio 3. Demostrar que el subconjunto $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4. Mostrar que los siguientes subconjuntos S de V son subespacios.

a) El subconjunto S de las matrices *simétricas* ($A = A^t$) es un subespacio de $K^{n\times n}$, el espacio de las matrices *cuadradas* de orden n.

b) El subconjunto $K_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$, para n fijo, es un subespacio de $K[x]$.

c) El subconjunto de las funciones *impares*, esto es $f(-x) = -f(x)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

d) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $A\,x = 0$ el sistema de ecuaciones lineales homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas. El conjunto S de las soluciones del sistema, esto es, el conjunto de n-uplas de K^n que satisfacen al sistema, es un espacio vectorial de K^n.

Combinaciones lineales, subespacio generado. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de vectores de V. Todo vector $x \in V$ de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} k_i\, x_i$ con escalares $k_i \in K$ se llama *combinación lineal* de $x_1, \dots, x_n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales, denotado por $\overline{\{x_1, \dots, x_n\}}$, es un subespacio de V denominado *subespacio generado* por $x_1, \dots, x_n$. Dado un subespacio S se dice que los vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ *generan* o *constituyen* un *sistema de generadores* de S si $S = \overline{\{x_1, \dots, x_n\}}$.

Ejercicio 5. Sea $x_1 = (-1, 0, 2), x_2 = (-1, 2, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Determinar si el vector x es combinación lineal de x_1, x_2, siendo (a) $x = (-1, 1, 3)$, (b) $x = (1, 2, 2)$

Ejercicio 6. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$, escribir la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. En $\mathbb{R}[x]$ expresar el polinomio $p = x^2 + 4x - 3$ como combinación lineal de los polinomios $p_1 = x^2 - 2x + 5$, $p_2 = 2x^2 - 3x$, $p_3 = x + 3$.

Ejercicio 8. Mostrar que en $\mathbb{R}^3$ el subespacio generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ es, geométricamente, el plano coordenado xy.

Ejercicio 9. Mostrar que los polinomios 1, x, x^2, $\dots$, x^n generan el espacio vectorial $K_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$.

Dependencia e independencia lineal. El conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ es *linealmente independiente* si la relación $\sum_{i=1}^{n} k_i\, x_i = 0$ implica que $k_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Si, por el contrario, la relación se verifica cuando uno de los k_i es no nulo, entonces el conjunto es *linealmente dependiente*. Un conjunto *infinito* de vectores de V es linealmente independiente si todo subconjunto finito del mismo es linealmente independiente, de lo contrario, es linealmente dependiente.

Ejercicio 10. Mostrar que dos vectores x_1 y x_2 son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Interpretar geométricamente para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 11. Determinar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

a) $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

b) $\{x_1 = (1, -1, 0), x_2 = (1, 1, 2), x_3 = (1, 0, 1)\}$

Ejercicio 12. En $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ determinar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes o no.

a) $f_1(t) = \cos^2 t, f_2(t) = \sin^2 t, f_3(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) $f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t, f_3(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Mostrar que el conjunto (infinito) $\{1, x, x^2, x^n, \dots\}$ de $K[x]$ es linealmente independiente.

Ejercicio 14. Mostrar que los vectores $x = (1+i, 2i)$, $y = (1, 1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, pero linealmente independientes sobre el cuerpo real $\mathbb{R}$.

Base y dimensión. Un conjunto $\mathcal{B} \subset V$ es una *base* de V si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\mathcal{B}$ genera a V. Se dice que V es de *dimensión finita* n, escrito como $\dim_K V = n$, si V tiene una base formada por n elementos. (La dimensión está bien definida dado que todas las bases de un espacio de dimensión finita tienen el mismo número de elementos). Si $\mathcal{B}$ es una base finita de V, entonces todo vector de V puede escribirse en forma *única* como combinación lineal de los elementos de la base (y recíprocamente). Además, si V tiene dimensión n, entonces un conjunto de n vectores de V es una base de V si y solo si es un conjunto linealmente independiente o un sistema de generadores de V. Por definición, el espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero. Cuando un espacio vectorial no es de dimensión finita se dice que es de dimensión *infinita*. Finalmente, como todo subespacio $S \subset V$ puede considerarse asimismo como un espacio vectorial, cabe hablar también de una base de S.

Ejercicio 15. Mostrar que el conjunto de n vectores de K^n $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ constituyen una base del mismo, llamada *base canónica* de K^n.

Ejercicio 16. Mostrar que el conjunto de $m \times n$ matrices E_{ij} cuyo elemento i, j es 1 y 0 los restantes, constituyen una base del espacio $K^{m\times n}$, denominado *base canónica* de $K^{m\times n}$.

Ejercicio 17. Mostrar que en $K[x]$ el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es una base (infinita) del mismo.

Ejercicio 18. Determinar si $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ y $(2, -1, 1)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 19. Hallar una base y la dimensión del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ donde

a) $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) : x = y = z\}$.

c) $S = \{(x, y, z) : z = 3x\}$.

Extender la base de S a una base del espacio $\mathbb{R}^3$ completo.

Suma y suma directa. Sean S_1 y S_2 subespacios de V. La *suma* de S_1 y S_2 es el conjunto $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ y constituye un subespacio de V. Si ambos subespacios son de dimensión finita, entonces $S_1 + S_2$ es de dimensión finita y $\dim_k(S_1 + S_2) = \dim_k S_1 + \dim_k S_2 - \dim_k(S_1 \cap S_2)$. Si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ entonces la suma se dice que es una suma *directa* y se escribe $S_1 \oplus S_2$. Si $S = S_1 \oplus S_2$ entonces todo vector $x \in S$ se puede escribir de modo *único* como $x = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$. Por

[1] Nótese que hay numerosos suplementos de S, los cuales pueden construirse ampliando bases de S a bases de V. Como se verá en un práctica siguiente, agregando más estructura a V se pude determinar un suplemento "canónico", a saber el *complemento ortogonal*.

otra parte, si S es un subespacio de V, un subespacio S' de V es un *suplemento* de S si verifica que $S \oplus S' = V$[1].

Ejercicio 20. Determinar si $\mathbb{R}^3$ es la suma de los siguientes subespacios y si dicha suma es directa.

a) $S_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

b) $S_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 21. Mostrar que $\mathbb{R}^{n\times n}$ es la suma directa de los subespacios formados por las matrices simétricas ($A = A^t$) y las matrices antisimétricas ($A = -A^t$).

Ejercicio 22. Si $V = \mathbb{R}^4$ hallar dos suplementos distintos del subespacio S definido por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

Coordenadas y cambio de base. Sea V un espacio de dimensión finita n y $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base *ordenada* de V. Dado un vector $x \in V$ se llama *i-ésima coordenada de x respecto a la base ordenada* $\mathcal{B}$ al escalar (único) $k_i \in K$ tal que $x = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$. La n-upla $(k_1, \dots, k_2)$ recibe el nombre de *n-upla coordenada de x respecto de la base ordenada* $\mathcal{B}$. En la práctica resulta de mayor conveniencia utilizar, en vez de la n-upla coordenada, el *vector columna coordenado* de x, denotado y definido por

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [k_1 \cdots k_n]^t.$$

Nótese que cada base ordenada $\mathcal{B}$ de V define una función biyectiva $x \to (k_1, \dots, k_n)$ entre V y K^n, la cual tiene además la propiedad de respetar las operaciones vectoriales en ambos espacios. Se dice entonces que V y K^n son *isomorfos*.

Ejercicio 23. Determinar las coordenadas del vector $x = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$, respecto de las bases:

a) $\{(1, 1), (1, 0)\}$, b) $\{(-2, 3), (1, 2)\}$, c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Ejercicio 24. Determinar las coordenadas del polinomio $p = 2x^2 - 5x + 6 \in \mathbb{R}_2[x]$ respecto de la base formada por los polinomios $p_1 = 1$, $p_2 = x - 1$, $p_3 = (x - 1)^2$.

Ejercicio 25. Determinar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$, respecto de la base canónica $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

En un espacio V existen diferentes bases. Por lo tanto surge la cuestión de como varían las coordenadas de un vector cuando se cambia de una base a otra. Sea V un espacio de dimensión finita n sobre el cuerpo K y sean $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ dos bases ordenadas de V. Entonces existe una única matriz $P \in K^{n\times n}$, llamada *matriz de cambio de base*, necesariamente inversible, tal que

$$[x]_{\mathcal{B}} = P\,[x]_{\mathcal{B}'}, \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[x]_{\mathcal{B}}.$$

para todo $x \in V$. Las columnas de P están dadas por $P_j = [x'_j]_{\mathcal{B}}$ para $j = 1, \dots, n$.

Ejercicio 26. Considérese las siguientes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{x_1 = (1, -2), x_2 = (3, -4)\},$$
$$\mathcal{B}' = \{x'_1 = (1, 3), x'_2 = (3, 8)\}.$$

a) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario (x, y) relativas a la base ordenada $\mathcal{B} = \{x_1, x_2\}$.

b) Determinar la matriz de cambio de base P entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

c) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario (x, y) relativas a la base ordenada $\mathcal{B}' = \{x'_1, x'_2\}$.

d) Determinar la matriz de cambio de base Q entre $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$.

e) Comprobar que $Q = P^{-1}$.

f) Mostrar que $[x]_{\mathcal{B}} = P\,[x]_{\mathcal{B}'}$.

g) Mostrar que $[x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[x]_{\mathcal{B}}$.