

PRACTICA 4

Interpolación polinómica.

Un ingeniero, un matemático y un físico se van a cazar ciervos. Cuando ven uno, el físico dispara y el tiro sale desviado a la izquierda. Dispara a continuación el ingeniero y su disparo se desvía a la derecha. Entonces le pregunta al matemático si va a disparar y este dice: "Para qué... prefiero interpolar".

**Interpolación polinómica. Fórmula de Lagrange.** Dada una función  $f(x)$  cuyos valores son conocidos en  $n + 1$  puntos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , existe un único polinomio  $p(x)$  de grado a lo más  $n$  tal que  $p(x_i) = f(x_i)$  para  $i = 0, \dots, n$ . Tal polinomio interpolante puede ser expresado explícitamente por la fórmula de interpolación de Lagrange

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x), \quad L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

Una cota para el error cometido en la interpolación puede ser obtenida del hecho de que si  $f$  es una función con derivada continua hasta el orden  $n + 1$  sobre un intervalo  $[a, b]$  que contiene a los puntos de la malla  $x_0, \dots, x_n$ , entonces para  $x \in [a, b]$  existe un  $\zeta = \zeta(x)$  en el intervalo más pequeño que contiene a los puntos  $x_0, \dots, x_n, x$  tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n + 1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

**Ejercicio 1.** Mostrar que la interpolación lineal de  $f$  a través de los puntos  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) está dada por

$$p(x) = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{(x_2 - x_1)},$$

y que el error cometido en dicha interpolación, para  $x_1 < x < x_2$ , está acotado por

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{8}(x_2 - x_1)^2,$$

donde  $M$  es una cota para la derivada segunda de  $f$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$ .

**Ejercicio 2.** Se tiene que preparar una tabla para la función  $f(x) = e^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Si a cada valor se lo da con cinco cifras decimales, ¿qué valor debe tener la diferencia de valores adyacentes de  $x$ , es decir, el tamaño del paso  $h$  de la tabla, para que el error absoluto de la interpolación lineal sea a lo más  $10^{-5}$ ?

**Interpolación iterada de Neville.** El siguiente procedimiento permite evaluar eficientemente el polinomio interpolante en un punto  $x = \xi$  particular sin necesidad de construir explícitamente el polinomio. Dados los  $(n + 1)$  puntos distintos  $x_0, \dots, x_n$  denotamos por  $Q_{i,j}$ ,  $i \geq j$ , al polinomio interpolante de grado  $j$  en los  $(j + 1)$  puntos  $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$ .

Algoritmo de interpolación iterada de Neville

Para evaluar en el punto  $x = \xi$  el polinomio  $p(x)$  que interpola a la función  $f$  en los  $(n + 1)$  puntos  $x_0, \dots, x_n$ .

Para  $i = 0, 1, \dots, n$

Tomar  $Q_{i,0} = f(x_i)$

Para  $j = 1, 2, \dots, i$

$$\text{Calcular } Q_{i,j} = \frac{(\xi - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (\xi - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Entonces  $Q_{n,n} = p(\xi)$ .

El algoritmo construye así una tabla "triangular" fila por fila, donde la respectiva columna es calculada recursivamente a partir de sus dos "vecinos" en la columna previa según la fórmula dada. Por ejemplo, para cinco nodos, el valor del polinomio interpolante es obtenido en  $Q_{4,4}$  según el siguiente esquema.

$x_0$	$Q_{0,0}$				
$x_1$	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$			
$x_2$	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$		
$x_3$	$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	
$x_4$	$Q_{4,0}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$

**Ejercicio 3.** Implemente el método de Neville como un programa FORTRAN. *Indicación:* Nótese que como la tabla se construye fila por fila, solo dos filas necesitan ser guardadas en memoria.

**Ejercicio 4.** La interpolación del siguiente conjunto de datos debería conducir a una aproximación de la función raíz cuadrada.

$x_i$	0	1	4	9	16
$y_i$	0	1	2	3	4

Estimar los valores de  $\sqrt{0.5}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{7}$  y  $\sqrt{15}$  considerando:

- a) El polinomio de grado cuatro que interpola los cinco datos de la tabla.
- b) El polinomio lineal que interpola a los dos valores más próximos de la tabla.

¿Cuales aproximaciones son mejores?

¿Que valores obtiene si considera *extrapolar* los cinco datos de la tabla para estimar, por ejemplo,  $\sqrt{25} = 5$  ó  $\sqrt{64} = 8$ ?

**Ejercicio 5. Fenómeno de Runge.** Considere el polinomio interpolante de grado 10 de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

sobre los puntos  $x_i = -1 + \frac{2(i-1)}{10}$ ,  $i = 1, \dots, 11$ . Calcule el error absoluto y relativo en los puntos intermedios a dichos puntos. Grafique y comente los resultados obtenidos.