PRACTICA 6
Espacios vectoriales.

Un matemático y un físico van a una conferencia sobre la teoría de Kaluza-Klein involucrando espacios de 9 dimensiones. El físico al rato se pierde en la charla, pero el matemático parece interesado, así que el físico le pregunta:
– ¿Cómo puedes entender todo ésto?
– Es fácil, todo es cuestión de visualizarlo.
– Pero ¿cómo visualizas un espacio de nueve dimensiones?
– Visualizo un espacio de dimensión N y luego hago $N = 9$.

Si leyeron el título y pensaron que los métodos de integración se terminaron y empezaban álgebra lineal se equivocaron. El título miente. Todavía queda algo más que integrar.

Para resolver una integral impropia numéricamente, debemos transformarla a integrales que podamos resolver. Un método es subdividir el intervalo de integración en varios subintervalos, por ejemplo,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^{r_1} f(x)\,dx = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx = ...$$

Vamos resolviendo cada integral y las vamos sumando hasta encontrar,

$$\left|\int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Este método sirve para muchas funciones, pero se corre el riesgo de estar resolviendo integrales que en realidad son divergentes.

Un método mejor es realizar un cambio de variables de forma tal que el intervalo de integración sea acotado. Por ejemplo, realizando la sustitución $y = e^{-x}$, tendremos,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f(-\ln y)}{y}\,dy = \int_0^1 \frac{g(y)}{y}\,dy$$

Existen varias sustituciones que modifican los intervalos de integración semi- o infinitos a intervalos finitos, y cual usemos dependerá del problema que estemos resolviendo.

Ejercicio 1. Utilizando cuadratura de Gauss-Legendre y la sustitución $t = 1/x$, resolver la integral,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Para que la sustitución pueda ser utilizada, descomponer la integral en la suma de dos integrales, una en el intervalo $[0, 1]$ y la otra en el intervalo $(1, \infty)$. La primera se resuelve sin usar el cambio de variable, mientras que en la segunda si debe utilizarse. Observar que el intervalo $(1, \infty)$ se transforma en el intervalo $(1, 0)$ utilizando este cambio de variable.

Ahora si empezamos con álgebra lineal.

Espacios vectoriales. A lo largo de la matemática se encuentras muchos ejemplos de objetos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por escalares, los cuales pueden englobarse en un concepto matemático general, llamado *espacio vectorial*. Brevemente un espacio vectorial es un conjunto V de elementos cualesquiera sobre el cual pueden realizarse ciertas operaciones llamadas de *suma* y *multiplicación por escalares* las cuales satisfacen ciertos axiomas particulares discutidos en la teoría.

Ejercicio 2. Dado el conjunto V con sus respectivas operaciones, mostrar que constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares K siendo K el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el de los números complejos $\mathbb{C}$.

a) $V = K^n$ el conjunto de las n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de K, siendo la suma de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ la n-upla $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$; y el producto de un escalar k por x, la $n-$upla $kx = (kx_1, \ldots, kx_n)$. Interpretar geométricamente los espacios vectoriales $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

b) $V = K^{m\times n}$, el conjunto de todas las matrices de m filas por n columnas sobre el cuerpo K. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices de $K^{m\times n}$, la suma de A y B es la matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ y el producto de un escalar k por la matriz A es la matriz $kA = (ka_{ij})$

c) $V = K[x]$ el conjunto de todos los polinomios $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$ en una indeterminada, con coeficientes $a_i \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, con la suma usual de polinomios y el producto con elementos de K.

d) Sea X un conjunto no vacío, y sea $V = K^X$ el conjunto de todas las funciones de X en K, $K^X = \{f/f : X \to K\}$. Si f y $g \in K^X$ la suma de f y g es la función $f + g$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in K$, y el producto de $k \in K$ por f es la función kf tal que $(kf)(x) = kf(x)$ para todo $x \in K$. Este espacio K^X se conoce como *espacio de funciones del conjunto X en el cuerpo K con operaciones punto a punto.*

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Probar que

a) Para todo escalar $k \in K$ y $0 \in V$, $k0 = 0$.

b) Para $0 \in K$ y todo vector $x \in V$, $0x = 0$.

c) Si $kx = 0$, donde $k \in K$ y $x \in V$, entonces $k = 0$ ó $x = 0$.

d) Para todo $k \in K$ y todo $x \in V$, $(-k)x = k(-x) = -kx$.

Subespacios. Un subconjunto S de V es un *subespacio* de V si es a su vez un espacio vectorial sobre K con respecto a las operaciones de V. Las condiciones necesarias y suficientes para que S sea un subespacio de V son que (i) $0 \in S$, (ii) $kx + y \in S$, para todo $x, y \in S$ y $k \in K$.

Ejercicio 4. Demostrar que el subconjunto $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Mostrar que los siguientes subconjuntos S de V son subespacios.

a) El subconjunto S de las matrices *simétricas* ($A = A^t$) es un subespacio de $K^{n\times n}$, el espacio de las matrices *cuadradas* de orden n.

b) El subconjunto $K_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$, para n fijo, es un subespacio de $K[x]$.

c) El subconjunto de las funciones *impares*, esto es $f(-x) = -f(x)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

d) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $A\,x = 0$ el sistema de ecuaciones lineales homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas. El conjunto S de las soluciones del sistema, esto es, el conjunto de n-uplas de K^n que satisfacen al sistema, es un espacio vectorial de K^n.

Combinaciones lineales, subespacio generado. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de vectores de V. Todo vector $x \in V$ de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} k_i\, x_i$ con escalares $k_i \in K$ se llama *combinación lineal* de $x_1, \dots, x_n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales, denotado por $\overline{\{x_1, \dots, x_n\}}$, es un subespacio de V denominado *subespacio generado* por $x_1, \dots, x_n$. Dado un subespacio S se dice que los vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ *generan* o *constituyen* un *sistema de generadores* de S si $S = \overline{\{x_1, \dots, x_n\}}$.

Ejercicio 6. Sea $x_1 = (-1, 0, 2), x_2 = (-1, 2, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Determinar si el vector x es combinación lineal de x_1, x_2, siendo (a) $x = (-1, 1, 3)$, (b) $x = (1, 2, 2)$

Ejercicio 7. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$, escribir la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. En $\mathbb{R}[x]$ expresar el polinomio $p = x^2 + 4x - 3$ como combinación lineal de los polinomios $p_1 = x^2 - 2x + 5$, $p_2 = 2x^2 - 3x$, $p_3 = x + 3$.

Ejercicio 9. Mostrar que en $\mathbb{R}^3$ el subespacio generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ es, geométricamente, el plano coordenado xy.

Ejercicio 10. Mostrar que los polinomios 1, x, x^2, …, x^n generan el espacio vectorial $K_n[x]$ de los polinomios de grado $\leq n$.

Dependencia e independencia lineal. El conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ es *linealmente independiente* si la relación $\sum_{i=1}^{n} k_i\, x_i = 0$ implica que $k_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Si, por el contrario, la relación se verifica cuando uno de los k_i es no nulo, entonces el conjunto es *linealmente dependiente*. Un conjunto *infinito* de vectores de V es linealmente independiente si todo subconjunto finito del mismo es linealmente independiente, de lo contrario, es linealmente dependiente.

Ejercicio 11. Mostrar que dos vectores x_1 y x_2 son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Interpretar geométricamente para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 12. Determinar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

a) $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

b) $\{x_1 = (1, -1, 0), x_2 = (1, 1, 2), x_3 = (1, 0, 1)\}$

Ejercicio 13. En $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ determinar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes o no.

a) $f_1(t) = \cos^2 t, f_2(t) = \sin^2 t, f_3(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) $f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \cos t, f_3(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 14. Mostrar que el conjunto (infinito) $\{1, x, x^2, x^n, \dots\}$ de $K[x]$ es linealmente independiente.

Ejercicio 15. Mostrar que los vectores $x = (1+i, 2i)$, $y = (1, 1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, pero linealmente independientes sobre el cuerpo real $\mathbb{R}$.

Base y dimensión. Un conjunto $\mathcal{B} \subset V$ es una *base* de V si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\mathcal{B}$ genera a V. Se dice que V es de *dimensión finita* n, escrito como $\dim_K V = n$, si V tiene una base formada por n elementos. (La dimensión está bien definida dado que todas las bases de un espacio de dimensión finita tienen el mismo número de elementos). Si $\mathcal{B}$ es una base finita de V, entonces todo vector de V puede escribirse en forma *única* como combinación lineal de los elementos de la base (y recíprocamente). Además, si V tiene dimensión n, entonces un conjunto de n vectores de V es una base de V si y solo si es un conjunto linealmente independiente o un sistema de generadores de V. Por definición, el espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero. Cuando un espacio vectorial no es de dimensión finita se dice que es de dimensión *infinita*. Finalmente, como todo subespacio $S \subset V$ puede considerarse asimismo como un espacio vectorial, cabe hablar también de una base de S.

Ejercicio 16. Mostrar que el conjunto de n vectores de K^n $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ constituyen una base del mismo, llamada *base canónica* de K^n.

Ejercicio 17. Mostrar que el conjunto de $m \times n$ matrices E_{ij} cuyo elemento i, j es 1 y 0 los restantes, constituyen una base del espacio $K^{m \times n}$, denominado *base canónica* de $K^{m \times n}$.

Ejercicio 18. Mostrar que en $K[x]$ el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es una base (infinita) del mismo.

Ejercicio 19. Determinar si $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ y $(2, -1, 1)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 20. Hallar una base y la dimensión del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ donde

a) $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) : x = y = z\}$.

c) $S = \{(x, y, z) : z = 3x\}$.

Extender la base de S a una base del espacio $\mathbb{R}^3$ completo.

Suma y suma directa. Sean S_1 y S_2 subespacios de V. La *suma* de S_1 y S_2 es el conjunto $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ y constituye un subespacio de V. Si ambos subespacios son de dimensión finita, entonces $S_1 + S_2$ es de dimensión finita y $\dim_k(S_1 + S_2) = \dim_k S_1 + \dim_k S_2 - \dim_k(S_1 \cap S_2)$. Si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ entonces la suma se dice que es una suma *directa* y se escribe $S_1 \oplus S_2$. Si $S = S_1 \oplus S_2$ entonces todo vector $x \in S$ se puede escribir de modo *único* como $x = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$. Por otra parte, si S es un subespacio de V, un subespacio S' de V es un *suplemento* de S si verifica que $S \oplus S' = V$[1].

Ejercicio 21. Determinar si $\mathbb{R}^3$ es la suma de los siguientes subespacios y si dicha suma es directa.

a) $S_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

b) $S_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 22. Mostrar que $\mathbb{R}^{n \times n}$ es la suma directa de los subespacios formados por las matrices simétricas ($A = A^t$) y las matrices antisimétricas ($A = -A^t$).

Ejercicio 23. Si $V = \mathbb{R}^4$ hallar dos suplementos distintos del subespacio S definido por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

[1] Nótese que hay numerosos suplementos de S, los cuales pueden construirse ampliando bases de S a bases de V. Como se verá en un práctica siguiente, agregando más estructura a V se pude determinar un suplemento "canónico", a saber el *complemento ortogonal*.

Coordenadas y cambio de base. Sea V un espacio de dimensión finita n y $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base *ordenada* de V. Dado un vector $x \in V$ se llama *i-ésima coordenada de x respecto a la base ordenada* $\mathcal{B}$ al escalar (único) $k_i \in K$ tal que $x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. La n-upla $(k_1, \dots, k_2)$ recibe el nombre de *n-upla coordenada de x respecto de la base ordenada* $\mathcal{B}$. En la práctica resulta de mayor conveniencia utilizar, en vez de la n-upla coordenada, el *vector columna coordenado* de x, denotado y definido por

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [k_1 \cdots k_n]^t .$$

Nótese que cada base ordenada $\mathcal{B}$ de V define una función biyectiva $x \to (k_1, \dots, k_n)$ entre V y K^n, la cual tiene además la propiedad de respetar las operaciones vectoriales en ambos espacios. Se dice entonces que V y K^n son *isomorfos*.

Ejercicio 24. Determinar las coordenadas del vector $x = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$, respecto de las bases:

a) $\{(1, 1), (1, 0)\}$, b) $\{(-2, 3), (1, 2)\}$, c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Ejercicio 25. Determinar las coordenadas del polinomio $p = 2x^2 - 5x + 6 \in \mathbb{R}_2[x]$ respecto de la base formada por los polinomios $p_1 = 1$, $p_2 = x - 1$, $p_3 = (x - 1)^2$.

Ejercicio 26. Determinar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$, respecto de la base canónica $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

En un espacio V existen diferentes bases. Por lo tanto surge la cuestión de como varían las coordenadas de un vector cuando se cambia de una base a otra. Sea V un espacio de dimensión finita n sobre el cuerpo K y sean $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ dos bases ordenadas de V. Entonces existe una única matriz $P \in K^{n \times n}$, llamada *matriz de cambio de base*, necesariamente inversible, tal que

$$[x]_{\mathcal{B}} = P\,[x]_{\mathcal{B}'}\,, \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[x]_{\mathcal{B}}\,.$$

para todo $x \in V$. Las columnas de P están dadas por $P_j = [x'_j]_{\mathcal{B}}$ para $j = 1, \dots, n$.

Ejercicio 27. Considérese las siguientes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{x_1 = (1, -2), x_2 = (3, -4)\},$$
$$\mathcal{B}' = \{x'_1 = (1, 3), x'_2 = (3, 8)\}.$$

a) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario (x, y) relativas a la base ordenada $\mathcal{B} = \{x_1, x_2\}$.

b) Determinar la matriz de cambio de base P entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

c) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario (x, y) relativas a la base ordenada $\mathcal{B}' = \{x_1', x_2'\}$.

d) Determinar la matriz de cambio de base Q entre $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$.

e) Comprobar que $Q = P^{-1}$.

f) Mostrar que $\left[x\right]_{\mathcal{B}} = P \left[x\right]_{\mathcal{B}'}$.

g) Mostrar que $\left[x\right]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \left[x\right]_{\mathcal{B}}$.