PRACTICA 7

Transformaciones lineales.

Un creyente le pregunta a un matemático:
- ¿Cree usted en un Dios único?
- Sí, salvo isomorfismos.

Transformaciones lineales. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Una función $T : V \to W$ es una *transformación lineal* de V en W si verifica que $T(kx+y) = kT(x)+T(y)$ cualesquiera sean los elementos x e y de V y todo escalar k de K. Así pues, una *transformación lineal respeta las operaciones de los espacios vectoriales* y por esta razón se la conoce también como un *homomorfismo* entre espacios vectoriales.

Ejercicio 1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineales entre los espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo K. Mostrar que:

a) $T(0) = 0$.

b) $T(-x) = -T(x)$, para todo $x \in V$.

c) $T(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(x_i)$, para cualesquiera vectores $x_i \in V$ y escalares $k_i \in K$.

d) Si el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\} \subset W$ es también linealmente dependiente.

Ejercicio 2.

a) Sea V un espacio vectorial e $I : V \to V$ la función *identidad* tal que $I(x) = x$, para todo $x \in V$. Probar que I es una transformación lineal.

b) Sean V y W espacios vectoriales sobre K y $O : V \to W$ la función *nula* tal que $O(x) = 0$, para todo $x \in V$. Mostrar que es una transformación lineal.

c) Sea A una matriz de $K^{m\times n}$. Probar que la función $T : K^n \to K^m$ definida por $T(x) = Ax$, para todo $x \in K^n$ (escrito como *vector columna*) es una transformación lineal.

d) Sea W el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y V el espacio vectorial de las funciones derivables definidas en $\mathbb{R}$. Sea $D : V \to W$ el *operador derivación*, tal que $D(f) = f'$, es decir, la aplicación tal que a cada función derivable f le hace corresponder su derivada f'. Mostrar que D es una transformación lineal.

e) Sea V el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y sea $J : V \to V$ el *operador integración*, tal que $J(f) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostrar que J es una transformación lineal.

f) Sea $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, donde θ es un número real dado. Mostrar que T_θ es una transformación lineal. Mostrar que, geométricamente, la acción de T_θ sobre un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es una rotación de ángulo θ alrededor del origen en sentido contrario a las agujas del reloj.

g) Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función conjugación en el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, esto es, $T(x, y) = (x, -y)$ para cada par ordenado (x, y). Probar que T *no* es una transformación lineal si $\mathbb{C}$ se ve como espacio vectorial sobre sí mismo, pero que T es lineal si $\mathbb{C}$ se ve como espacio vectorial sobre el cuerpo real $\mathbb{R}$.

Teorema: Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo K, siendo V de dimensión finita. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base ordenada de V y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces, existe y es única, una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

☞ Este teorema muestra que una transformación lineal está completamente determinada por los valores que asigna a los elementos de una base del espacio vectorial donde está definida.

☞ Subrayemos el hecho de que los vectores y_i son completamente arbitrarios; pueden ser linealmente dependientes o incluso iguales entre sí.

Ejercicio 3.

a) Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (1, 2, 0)$ y $T(1, 2) = (1, 0, -1)$. Calcular $T(2, -3)$.

b) Investigar si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(1, 2) = 3$, $T(2, 2) = -1$ y $T(2, 5) = 19/2$.

Núcleo e imagen de una transformación lineal. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El *núcleo* de T, denotado por $N(T)$, es el subconjunto de elementos de V cuyas imágenes por T son el vector nulo de W: $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$. La *imagen* de T, denotada por $I(T)$, es el subconjunto de elementos de W formado por las imágenes, mediante T, de los vectores de V: $I(T) = \{T(x) : x \in V\}$. Es fácil ver que $N(T)$ es un subespacio de V mientras que $I(T)$ es un subespacio de W. Por otra parte, si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de generadores de V entonces $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$ es un conjunto de generadores de $I(T)$. Cuando V es de dimensión finita se tiene el siguiente teorema fundamental:

Teorema: Sea V de dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim N(T) + \dim I(T).$$

☞ Se define el *rango* de T como la dimensión de su imagen, rango $T = \dim I(T)$, y la *nulidad* o *defecto* de T a la dimensión de su núcleo, nulidad $T = \dim N(T)$. Así pues, cuando V es de dimensión finita: rango $T +$ nulidad $T = \dim V$.

Ejercicio 4. Determinar el núcleo y la imagen de la transformación identidad $I : V \to V$, $I(x) = x$, y de la transformación nula $O : V \to W$, $O(x) = 0$.

Ejercicio 5. Determinar el núcleo del operador derivación D y el operador integración J (ambos definidos en un ejercicio previo).

Ejercicio 6. Determinar el núcleo y la imagen de las siguientes trasformaciones lineales. Verificar que se cumple el teorema fundamental.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y)$.

b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4)$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$.

Clasificación de las transformaciones lineales. Introduzcamos las siguientes definiciones: Sean $T : V \to W$ una trasformación lineal entre los espacios vectoriales V y W.

(i) T es un *monomorfismo* si T es *inyectiva* (esto es, si $T(x) = T(y)$ implica que $x = y$).

(ii) T es un *epimorfismo* si T es *suryectiva* (esto es, si para todo $y \in W$ existe un $x \in V$ tal que $T(x) = y$).

(iii) T es un *isomorfismo* si T es *biyectiva* (esto es, si T es inyectiva *y* suryectiva).

(iv) T es un *operador lineal* sobre V o un *endomorfismo* sobre V si $W = V$.

(v) T es un *automorfismo* si es un endomorfismo sobre V *y* un isomorfismo.

La naturaleza lineal de T permite caracterizar los monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos de maneras equivalentes como se indica a continuación en los siguientes teoremas.

Teorema: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de V. Son equivalentes: (i) T es un monomorfismo, (ii) $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente, (iii) $N(T) = \{0\}$.

Teorema: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de V. Son equivalentes: (i) T es un epimorfismo, (ii) $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$ es un conjunto de generadores de W, (iii) $I(T) = W$.

Teorema: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de V. Son equivalentes: (i) T es un isomorfismo, (ii) $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$ es una base W, (iii) $N(T) = \{0\}$ y $I(T) = W$.

Teorema: Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Entonces su función inversa $T^{-1} : W \to V$ es una transformación lineal, más aún, es un isomorfismo.

Teorema: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión *finita* tal que $\dim V = \dim W$. Entonces T es un isomorfismo si y solo si T es un monomorfismo o un epimorfismo. En particular, un endomorfismo sobre V es un automorfismo si y solo si es un epimorfismo o un monomorfismo.

Ejercicio 7. Determinar que tipo de transformaciones lineales son las siguientes:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, y, x)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(a, b, c) = ax^2 + bx + c$.

d) $T : K[x] \to K[x]$, $T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$.

Ejercicio 8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$, $T(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$. Determinar si T es un automorfismo sobre $\mathbb{R}^3$. Si lo es, determinar su inversa T^{-1}.

Representación matricial de una transformación lineal. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo K y sea W un espacio vectorial de dimensión finita m sobre el mismo cuerpo. Sean $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ bases ordenadas de V y W, respectivamente. La *matriz asociada a la transformación lineal* $T : V \to W$ *respecto de las bases ordenadas* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, denotada por $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, es la matriz de $m \times n$ de elementos de K:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left([T(x_1)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, [T(x_2)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [T(x_n)]_{\mathcal{B}'} \right).$$

Esto es, la columna j-ésima de la matriz es el vector de coordenadas de la imagen, por T, del j-ésimo elemento de la base $\mathcal{B}$ de V, respecto de la base $\mathcal{B}'$ de W. Esta matriz caracteriza a T debido a que las coordenadas de la imagen de un vector $x \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ de W es igual al producto de la matriz de la transformación lineal por el vector de coordenadas de dicho vector, respecto de la base $\mathcal{B}$ de V:

$$[T(x)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\, [x]_{\mathcal{B}}.$$

Cuando T es un endomorfismo sobre V y sólo hay una base involucrada, escribimos $[T]_{\mathcal{B}}$, en vez $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, para denotar la matriz (en este caso cuadrada) asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 9.

a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformación lineal definida por $T(x, y, z) = (2x - y, 2y - z)$.

i) Hallar la matriz de T respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

ii) Obtener la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$.

iii) Calcular, con las dos matrices anteriores, $T(-1, 2, -3)$.

b) Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x, -y)$.

i) Hallar la matriz de T respecto de la base canónica.
ii) Obtener la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}$.
iii) Calcular, con las dos matrices anteriores, $T(2,-3)$.

c) Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a+d, b-c)$.

i) Hallar la matriz de T respecto a las bases canónicas respectivas.
ii) Calcular, con la representación matricial, la imagen por T de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Una transformación lineal puede ser representada por distintas matrices si se utilizan diferentes bases. La relación entre estas matrices es especificada como sigue. Sea $T : V \to W$ y sean $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ dos bases ordenadas de V y $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\tilde{\mathcal{B}}' = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}$ dos bases ordenadas de W. Entonces

$$[T]_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}'} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}P,$$

siendo $P \in K^{n\times n}$ la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\tilde{\mathcal{B}}$, cuya columna j-ésima es $[\tilde{x}_j]_{\mathcal{B}}$, y $Q \in K^{m\times m}$ la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\tilde{\mathcal{B}}'$, cuya columna j-ésima es $[\tilde{y}_j]_{\mathcal{B}'}$. En particular, si T es un *endomorfismo* sobre V y consideramos dos bases, $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$, de V,

$$[T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

☞ Dos matrices A y B de $K^{n\times n}$ se dicen *semejantes* si existe una matriz $P \in K^{n\times n}$ inversible tal que $B = P^{-1}AP$. La semejanza de matrices es una relación de equivalencia en el conjunto de matrices cuadradas sobre el cuerpo K. De acuerdo a lo anterior, matrices que representan el mismo endomorfismo sobre un espacio de dimensión finita son semejantes y, recíprocamente, *matrices semejantes representan el mismo endomorfismo.*

Ejercicio 10.

a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformación lineal definida por $T(a,b,c) = (a+b-c, a-b)$.

i) Hallar la matriz de T respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
ii) Obtener las matrices de cambio de base de las bases anteriores a las bases $\tilde{\mathcal{B}} = \{(0,1,1),(1,-1,-2),(1,-1,-1)\}$, $\tilde{\mathcal{B}}' = \{(1,3),(0,-2)\}$.
iii) Calcular la matriz de T respecto al nuevo par de bases.

b) Sea T el endomorfismo sobre $\mathbb{R}^3$ definido por $T(a,b,c) = (a+b, a-b+c, a-c)$.

i) Hallar la matriz de T respecto de las bases canónica.
ii) Obtener la matriz de cambio de base a la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,
iii) Calcular la matriz de T respecto a la nueva base.

Álgebra de transformaciones lineales. Denotemos por $\mathcal{L}(V,W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo K. Este conjunto, dotado con operaciones usuales de suma de funciones y el producto de un escalar por una función *constituye un espacio vectorial.* Más aún, si V y W son de dimensión finita n y m respectivamente, $\mathcal{L}(U,V)$ es de dimensión finita $m\cdot n$. Además si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ordenadas de V y W respectivamente, la representación matricial de la transformación lineal $kT+U$ es $[kT+U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = k[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [U]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. El concepto de *función compuesta* puede ser también aplicado aquí. Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, dadas las transformaciones lineales $T : V \to W$ y $U : W \to Z$, la función compuesta $U \circ T : V \to Z$, definida por $(U\circ T)(x) = U(T(x))$ para todo $x \in V$, es una transformación lineal. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ son bases de los espacios de dimensión *finita* V, W, Z, respectivamente, entonces la representación matricial de la transformación lineal compuesta está dada por $[U\circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, esto es, el producto matricial de las representaciones matriciales de U y T.

Ejercicio 11. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T(x,y,z) = (x+y+z, 2x-3z)$, $U(x,y,z) = (4x-2y, -y+2z)$. Calcular la matriz de la transformación lineal $3T+U$ respecto a la base canónica.

Ejercicio 12. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $T(x,y,z) = (x-y, y+z)$, $U(x,y) = (x+y, x-y, 2x+3y)$. Obtener las transformaciones $U\circ T$ y $T\circ U$ y sus representaciones matriciales respecto a las bases canónicas.

Ejercicio 13. Sea $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ respecto de la base canónica. Demostrar que si θ y θ' son números reales cualesquiera, entonces: (a) $T_{\theta'} \circ T_\theta = T_{\theta+\theta'}$, (b) $T_\theta^{-1} = T_{-\theta}$. Interpretar geométricamente.

El conjunto de los endomorfismos sobre un espacio vectorial V constituye un caso particular de $\mathcal{L}(V,W)$ cuando $W = V$ y lo indicamos por $\mathcal{L}(V,V)$. De acuerdo a lo anterior, $\mathcal{L}(V,V)$ es un espacio vectorial y su dimensión es n^2 si V es de dimensión n. Dado que, en este caso particular, la composición de endomorfismos es una transformación lineal de V sobre V (es decir, es una ley interna en $\mathcal{L}(V,V)$), el espacio tiene una otra operación, un "producto", definida por la composición. Esta operación es asociativa, distributiva respecto de la suma, conmuta con el producto por escalares y tiene un elemento unidad (a saber la transformación identidad), pero no es conmutativa (esto es, en general, $U\circ T \neq T\circ U$). Estas propiedades permiten definir las *potencias naturales* de un endomorfismo inductivamente como $T^0 = I$, $T^n = T\circ T^{n-1}$, para $n = 1, \dots$.

☞ La composición en $\mathcal{L}(V, V)$ da a este espacio una estructura algebraica "mayor" que la de espacio vectorial: técnicamente un espacio vectorial provisto de un "producto" con las propiedades anteriores constituye un *álgebra lineal no conmutativo con unidad*.

Proyecciones. Sea V un espacio vectorial y sea S_1 un subespacio de V; sea S_2 un suplemento de S_1. Entonces $V = S_1 \oplus S_2$. En estas condiciones cada $x \in V$ se escribe en forma *única* como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$. Tiene sentido entonces definir la función $E : V \to V$ tal que $E(x) = x_1$ para todo $x \in V$. Tal función se llama *proyección de V sobre S_1 con dirección S_2*. Puede probarse que (i) E es un endomorfismo sobre V,(ii) $I(E) = S_1$, $N(E) = S_2$, (iii) $E^2 = E$. Por otra parte, si E es endomorfismo sobre V tal que $E^2 = E$ entonces se cumple que $V = I(E) \oplus N(E)$ y E es la proyección de V sobre $I(E)$ con dirección $N(E)$. En virtud de lo anterior, podemos decir que una *proyección* de V es un endomorfismo sobre V tal que $E^2 = E$.

Ejercicio 14. Considérese en $\mathbb{R}^3$ los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

a) Verificar que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

b) Determinar la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre S_1 con dirección S_2.