PRACTICA 8

Espacios normados y con producto interno.

- ¿ Cómo mata un matemático a una araña?
- Con la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

Espacios métricos y normados. El concepto de distancia en el espacio ordinario puede extenderse a dominios mucho más generales si se lo introduce en forma axiomática sobre conjuntos que no necesariamente deben tener una estructura de espacio vectorial: Sea V un conjunto cualquiera. Una *distancia* sobre V es una función $d : V \times V \to \mathbb{R}$ que asigna a cada par de elementos x, y de V un número real, denotado por $d(x, y)$, que satisface los siguientes axiomas: (i) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría), (iii) $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y)$ (desigualdad triangular). El conjunto V provisto de una distancia se dice que es un *espacio métrico*. Ahora, si V es un espacio vectorial, la noción métrica de longitud puede introducirse también en forma axiomática a partir del concepto de norma: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales o los complejos[1]. Una *norma* sobre V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, que asigna a cada vector x de V un número real, denotado por $\|x\|$, que satisface los siguientes axiomas: (i) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, (ii) $\|kx\| = |k|\,\|x\|$, (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Un espacio vectorial provisto de una norma se dice que es un *espacio normado*, y tal espacio puede considerarse dotado de una estructura métrica definiendo la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

☞ Para $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las siguientes expresiones definen tres importantes normas en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$,

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\},$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

denominadas norma-∞, norma-1 y norma-2 (o norma *euclideana*) respectivamente.

☞ Para $V = C[a, b]$, el conjunto de las funciones reales continuas sobre el intervalo $a \leq t \leq b$, las siguientes expresiones definen normas sobre el mismo,

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|,$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t},$$

[1] Si bien en la teoría general de espacios vectoriales el cuerpo fundamental K de escalares es completamente arbitrario, en esta práctica consideraremos solamente el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos o el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

☞ El concepto de distancia permite definir el límite de una sucesión de vectores: Se dice que una sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ en V converge al vector x respecto de la norma $\|\cdot\|$ si $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$. Aunque esta definición implica que la convergencia depende de la norma escogida puede mostrar que, si V es de dimensión *finita*, todas las normas son equivalentes para la convergencia; esto es, si una sucesión de vectores converge respecto a una norma, convergerá respecto de cualquier otra norma. Este resultado no es válido si el espacio es de dimensión infinita.

Ejercicio 1. Demostrar que, efectivamente, todo espacio normado es un espacio métrico definiendo la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ejercicio 2. Un vector $x \in V$ se dice que es un *vector unitario* o que está *normalizado* si $\|x\| = 1$. Mostrar que todo vector no nulo puede ser normalizado multiplicándolo por el inverso de su norma.

Ejercicio 3. Encontrar la norma-1, 2 y ∞ de $x = (2, 1, -4, -2) \in \mathbb{R}^4$ y de $x = (1 + i, 1 - i, 1, 4i) \in \mathbb{C}^4$.

Ejercicio 4. Considérese los vectores $x = (1, 3, -6, 4)$ e $y = (3, -5, 1, -2)$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar sus norma-1, 2 e ∞, y calcular $d_1(x, y)$, $d_2(x, y)$ y $d_\infty(x, y)$.

Ejercicio 5. Sea el conjunto $S_p = \{x \in V : \|x\|_p = 1\}$. Interpretar geométricamente tal conjunto para $V = \mathbb{R}^2$ con $p = \infty, 1, 2$.

Ejercicio 6. Considérese la función $f(t) = t^2 - 4t$ en $C[0, 3]$. Determinar $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$ y $\|f\|_2$.

Ejercicio 7. Demostrar que la sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}$ de $\mathbb{R}^n$ converge a x con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejercicio 8. Definiendo $x^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ como $x^{(k)} = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k} \sin k\right)$. Mostrar que la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge a $(1, 2, 0, 0)$.

Normas matriciales. El conjunto de las matrices $m \times n$ ya sea sobre el cuerpo real o complejo constituye un espacio vectorial de dimensión $m \cdot n$ que es isomorfo al espacio vectorial de las $(m \cdot n)$-uplas sobre el cuerpo real o complejo. Por lo tanto, toda norma vectorial de este espacio constituye una norma para el espacio vectorial de las matrices. Ahora bien, cuando $n = m$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n tiene una estructura “mayor” que la de espacio vectorial debido a que, en este caso, la multiplicación de matrices es una ley interna. Específicamente dicho conjunto constituye un *álgebra lineal no conmutativa con unidad*. Así una norma *matricial* debe incluir un axioma extra a la definición de norma *vectorial* que contemple la existencia de la multiplicación matricial: Una *norma matricial* sobre el conjunto de las matrices de orden n sobre el cuerpo real o complejo es una función que asigna a cada matriz A un número real, denotado por $\|A\|$, que satisface los axiomas: (i) $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$, (ii) $\|kA\| = |k|\,\|A\|$, (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, ($iv$) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (propiedad submultiplicativa).

☞ Aún cuando una norma matricial puede ser obtenida de varias maneras, en la práctica las únicas normas de interés son aquellas que resultan *inducidas* a partir de una norma vectorial de las n-uplas como sigue: Si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial sobre el espacio de las n-uplas reales o complejas, entonces $\|A\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$ (donde x es escrito como un vector columna $n \times 1$) es una norma matricial. Para una norma vectorial y su norma matricial inducida se satisface la relación $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

☞ Las normas matriciales inducidas por la norma-∞ y la norma-1 pueden calcularse fácilmente a partir los elementos de la matriz:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

en tanto que la norma matricial inducida por la norma euclideana está dada por $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$, siendo $\lambda_{\max}$ el mayor numero real positivo tal que $A^*A - \lambda I$ es singular, esto es, el mayor *autovalor* de A^*A. (A^* es la matriz transpuesta conjugada de A, de elementos $a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$. En el caso real $A^* = A^t$).

Ejercicio 9. Determinar las normas ∞ y 1 de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Espacios con producto interno. El concepto geométrico de “perpendicularidad” encuentra su generalización en un espacio vectorial general introduciendo un *producto interno*. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. Un *producto interno* sobre V es una función $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to K$ que asigna a cada par de vectores x, y de V un escalar de K, denotado por $\langle x|y\rangle$, tal que satisface los axiomas: (i) $\langle x|x\rangle$ es real siendo $\langle x|x\rangle \geq 0$, y $\langle x|x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$, (ii) $\langle x|ky\rangle = k\langle x|y\rangle$ para todo $k \in K$, (iii) $\langle x|y + z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$, ($iv$) $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (en el caso real, este axioma se reduce a $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$). Un *espacio con producto interno* es un espacio vectorial V sobre el cuerpo real o complejo dotado de un producto interno. En virtud de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*[2] todo espacio con producto interno puede considerarse un espacio normado definiendo la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ y, además, un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$. Con la norma así definida, la desigualdad de Cauchy-Schwarz puede escribirse como $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Dos vectores x, y de V se dicen *ortogonales* si $\langle x|y\rangle = 0$ y para ellos es válida la relación $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (esto es una generalización del *teorema de Pitágoras*)[3].

☞ Para $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y \quad \text{y} \quad \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = x^* y,$$

(donde escribimos los vectores como vectores columnas $n \times 1$), definen un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente, denominado *producto interno canónico*.

☞ Sea $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbb{C}^{n\times n}$, entonces

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} = \text{traza}(A^t B) \text{ y}$$

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}b_{ki} = \text{traza}(A^* B)$$

definen sendos productos internos canónicos en tales espacios.

☞ Para $V = C[a, b]$, $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, define un producto interno en tal espacio.

Ejercicio 10. Si V es un espacio con producto interno, mostrar que

a) $\langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$.

b) $\langle kx|y\rangle = \overline{k}\langle x|y\rangle$.

c) $\langle x|0\rangle = \langle 0|x\rangle = 0$.

d) Si $x = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} l_j y_j$ entonces $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{k_i} l_j \langle x_i|y_j\rangle$.

Ejercicio 11. Describir las norma inducida por el producto interno para los espacios enunciados en las notas anteriores.

Ejercicio 12. Encontrar dos vectores de norma unidad que sean ortogonales al vector $(3, -2) \in \mathbb{R}^2$ respecto al producto interno canónico.

Ejercicio 13. Mostrar que $f(t) = \sin t$ y $g(t) = \cos t$ son vectores ortogonales de $C[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 14. Sea V un espacio con producto interno sobre el cuerpo real.

a) Mostrar que si x e y son vectores no nulos de V entonces $-1 \leq \dfrac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$ y, por lo tanto, existe un único θ con $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}$. El valor de θ es llamado el *ángulo entre los vectores x e y*.

[2] Teorema de Cauchy-Schwarz: para todo par de vectores $x, y \in V$, $\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$.

[3] Nótese que el enunciado recíproco es válido sólo para espacios sobre el cuerpo real. En el caso complejo, si el teorema de Pitágoras se cumple no necesariamente los vectores son ortogonales.

b) ¿Cuál es el valor de θ cuando x e y son ortogonales?

c) Encontrar el ángulo entre $x = (2, -1, 1)$ e $y = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico.

d) Determinar el ángulo entre las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

respecto al producto interno $\langle A|B\rangle = \text{traza}(A^t B)$.

Conjuntos y bases ortogonales y ortonormales. Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ en un espacio con producto interno V se dice *ortogonal* si cada par de vectores distintos son ortogonales: $\langle v_i|v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Si, además, cada vector tiene longitud unidad, $\|v_i\| = 1$, el conjunto se dice *ortonormal*. De todo conjunto ortogonal se puede obtener un conjunto ortonormal simplemente normalizando los vectores. Una propiedad fundamental de los conjuntos ortogonales es que *todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente*. Una base $\mathcal{B}$ de V es una *base ortogonal* u *ortonormal* según lo sea como conjunto de vectores. Es sabido de la teoría que *todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal*. Tal base puede ser obtenida a partir de una base cualquiera de V aplicando el *método de ortogonalización de Gram-Schmidt*. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V entonces la expresión de un vector $x \in V$ como combinación lineal de los elementos de la base está dada por:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|x\rangle v_i.$$

Los coeficientes de esta expresión, esto es, las coordenadas respecto de la base ortonormal $\mathcal{B}$, se llaman *coeficientes de Fourier* de x con respecto a dicha base.

Ejercicio 15. Mostrar que si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal del espacio con producto interno V, entonces para cada $x, y \in V$,

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i|x\rangle} \langle v_i|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|v_i\rangle\langle v_i|y\rangle.$$

Ejercicio 16. Demostrar que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal respecto al producto interno canónico.

Ejercicio 17. Considere en $\mathbb{R}^4$ el conjunto $\{x_1 = (1, -1, 0, 2), x_2 = (1, 1, 1, 0), x_3 = (-1, -1, 2, 0)\}$.

a) Verificar que, respecto al producto interno canónico de $\mathbb{R}^4$, el conjunto es ortogonal.

b) Encontrar un vector x_4 no nulo tal que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sea ortogonal.

c) Convertir el conjunto anterior en una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 18. Considerando el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$ determinar las coordenadas del vector $x = (1, 0, -2)$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)\right\}$

Ejercicio 19. Considerando en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el producto interno $\langle A|B\rangle = \text{traza}(A^t B)$, verificar que el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal para tal espacio y calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a $\mathcal{B}$.

Cambio de coordenadas. Consideremos ahora el cambio de coordenadas en un espacio con producto interno V de dimensión finita sobre el cuerpo complejo (real). Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_2'\}$ dos bases ordenadas *ortonormales* de V, entonces la matriz de cambio P $n \times n$ de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$, es decir, aquella tal que $[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}$, es una matriz *unitaria* (*ortogonal*), esto es, $P^{-1} = P^*$ ($P^{-1} = P^t$). Considérese ahora un operador lineal T sobre V, entonces respecto de tales bases de V las matrices que lo representan están relacionadas por semejanza: $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$, pero si las bases son ortonormales, será entonces $[T]_{\mathcal{B}'} = P^*[T]_{\mathcal{B}}P$ ($[T]_{\mathcal{B}'} = P^t[T]_{\mathcal{B}}P$ en el caso real).

☞ Dos matrices complejas A y B de $n \times n$ se dicen *unitariamente equivalentes* si existe una matriz unitaria P de $n \times n$ tal que $B = P^*AP$. Análogamente, dos matrices reales A y B de $n \times n$ son *ortogonalmente equivalentes* si existe una matriz ortogonal P de $n \times n$ tal que $B = P^tAP$.

☞ De acuerdo a la anterior, resulta que para todo operador lineal T sobre V sus representaciones matriciales respecto a bases ordenadas *ortonormales* son unitariamente equivalentes (en el caso complejo) u ortogonalmente equivalentes (en el caso real).

Ejercicio 20. Sean $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\}$ bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ con respecto al producto interno canónico.

a) Determinar la matriz P 2×2 del cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Mostrar que, efectivamente, P es ortogonal.

b) Determinar la representación del operador lineal $T(x, y) = (y, x)$ respecto de sendas bases. Mostrar que, efectivamente, tales matrices son ortogonalmente equivalentes.

Complemento y proyección ortogonal. Sea S un subespacio de un espacio con producto interno V, el *complemento ortogonal* de S, denotado por $S^{\perp}$, es el conjunto de todos los vectores de V que son ortogonales a todo vector de S: $S^\perp = \{x \in V : \langle s|x\rangle = 0$ para todo $s \in S\}$. Tal conjunto es un subespacio de V. Además si S es de dimensión *finita*, resulta que $S^\perp$ es un suplemento de S: $V = S \oplus S^\perp$. El operador E proyección de V sobre S con dirección $S^\perp$ se llama *operador de proyección ortogonal de* V *sobre* S. Esta es una transformación lineal idempotente, $E^2 = E$, con imagen S y núcleo $S^\perp$. Si $x \in V$, el vector $s \in S$ asignado por E, $s = E(x)$, se llama *proyección ortogonal de* x *sobre* S. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base ortonormal de S, la proyección ortogonal de x sobre S está dada por $s = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i|x\rangle\, v_i$.

☞ Si S es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico, la proyección ortogonal de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre S puede calcularse como $s = M(M^tM)^{-1}M^t\,x$ donde M es la matriz $n\times r$ cuyas columnas son los vectores de una base (no necesariamente ortonormal) de S.

Ejercicio 21. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $(1,2,3,-1,2)$ y $(2,4,7,2,-1)$. Hallar el complemento ortogonal $S^\perp$ de S respecto al producto interno canónico.

Ejercicio 22. Considere en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el producto interno $\langle A|B\rangle = \text{traza}(A^tB)$. Determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices simétricas.

Ejercicio 23. Este ejercicio muestra como la proyección ortogonal de un vector puede ser determinada por tres diferentes métodos y permite comparar el grado de dificultad involucrado en cada uno de ellos. Considere el subespacio $S \subset \mathbb{R}^3$, con el producto interno canónico, definido por la ecuación $3x + 2y - z = 0$. Se quiere determinar la proyección ortogonal sobre S del vector $x = (1,1,2)$.

- MÉTODO I

  a) Encontrar una base de S.
  b) Encontrar $S^\perp$ y una base del mismo.
  c) Representar a x con respecto a la base formada por la unión de la base de S y la base de $S^\perp$ obtenidas anteriormente.
  d) Determinar la proyección ortogonal de x sobre S manteniendo sólo la parte correspondiente a S en la combinación lineal del punto anterior.

- MÉTODO II

  a) Determinar una base *ortonormal* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ de S.
  b) Calcular la proyección ortogonal de x sobre S según la fórmula $s = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i|x\rangle\, v_i$.

- MÉTODO III

  a) Determinar la matriz M de $3\times k$ cuyas columnas son una base de S.
  b) Calcular la proyección ortogonal de x sobre S según la fórmula $s = M(M^tM)^{-1}M^t\,x$.