PRACTICA 10

Autovalores y autovectores.

Autovalores y autovectores de una matriz. Sea A una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo K, usualmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Un escalar λ de K es un *autovalor* de A si existe un vector (columna) no nulo $\mathbf{x}$ de K^n tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Todo vector no nulo que satisfaga esta ecuación se llama *autovector* de A asociado al autovalor λ. El conjunto de todos los vectores de K^n tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se llama *espacio propio* asociado al autovalor λ. El conjunto de todos los autovalores *distintos* de A se llama el *espectro* de A.

☞ Existe un solo autovalor correspondiente a un autovector dado. En efecto, si $A\mathbf{x} = \lambda x$ y $A\mathbf{x} = \mu x$ para cierto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\lambda\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ con lo cual $\lambda = \mu$. Esto justifica la exclusión del vector nulo como autovector, si bien verifica la definición.

☞ El espacio propio asociado a un autovalor λ, tal como se definió, consiste en el conjunto de los autovectores de A asociados a λ y el vector nulo, y constituye un subespacio de K^n.

☞ Los autovalores de A son soluciones de la *ecuación característica*: $\det(A - \lambda I) = 0$ o, equivalentemente, las raíces del *polinomio característico* $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ el cual es un polinomio en λ de grado n con término principal $(-1)^n$ y término independiente $\det A$[1].

☞ En virtud de la nota anterior es claro que el cuerpo subyacente K juega un papel fundamental dado que la existencia de autovalores depende de la existencia de raíces de polinomios en K. El *teorema fundamental del álgebra* asegura que cada polinomio de grado n en $\mathbb{C}$ tiene n raíces (reales o complejas, todas distintas o no). Por lo tanto, una matriz cuadrada A de orden n sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ tiene n autovalores, pero en general serán complejos y algunos pueden estar repetidos. En particular si los elementos de A son números reales, entonces A puede no tener autovalores reales, y si tiene autovalores complejos entonces éstos deben aparecer en pares conjugados.

☞ Los autovectores correspondientes a un autovalor λ resultan de resolver el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, el cual, por su naturaleza, es indeterminado y por lo tanto las componentes de $\mathbf{x}$ quedan definidas a menos de un factor de proporcionalidad. El espacio propio asociado al autovalor λ no es más que el conjunto solución de este sistema, y una base del mismo puede ser obtenida de la solución encontrada.

☞ La *multiplicidad algebraica* de un autovalor λ de A es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico. La *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente. En general, la multiplicidad geométrica no excede la multiplicidad algebraica.

☞ Autovectores correspondientes a autovalores *distintos* de A son linealmente independientes en K^n.

[1] En la literatura puede encontrarse el polinomio característico definido en forma alternativa como $\hat{p}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Es claro que $\hat{p}_A = (-1)^n p_A$, por lo tanto ambos tienen las mismas raíces (y conducen entonces a los mismos autovalores).

Ejercicio 1. Determinar la ecuación característica, los autovalores y autovectores, el espectro y el espacio propio correspondiente para cada una de las siguientes matrices,

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Demostrar que los autovalores de toda matriz triangular (ya sea inferior o superior) son los elementos de su diagonal.

Ejercicio 3. Demostrar que el escalar nulo 0 es autovalor de una matriz A si y solo si A es singular (no inversible).

Ejercicio 4. Demostrar que si A es no singular y λ es un autovalor de A con autovector $\mathbf{x}$, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} con autovector $\mathbf{x}$.

Ejercicio 5. Demostrar que si λ es un autovalor de A entonces λ^k es un autovalor de A^k, k entero positivo.

Ejercicio 6. Demostrar que si A es una matriz cuadrada, el polinomio característico de A^t es igual al polinomio característico de A.

Matrices semejantes. Recordemos la siguiente definición. Dos matrices A y B de $n \times n$ se dicen *semejantes* si existe una matriz P, $n \times n$, no singular tal que $B = P^{-1}AP$. Y se dice que B se obtiene de A por la *transformación de semejanza* $P^{-1}AP$.

Ejercicio 7. Demostrar que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y, en consecuencia, los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica.

Ejercicio 8. Mostrar que, si bien las siguientes matrices tienen los mismos autovalores, no son semejantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que el recíproco del ejercicio anterior no es válido.

Ejercicio 9. Las siguientes dos matrices son semejantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puesto que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia A y B tienen los mismos autovalores. ¿Cuales son sus autovectores? Esto prueba que si bien dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores no necesariamente tienen los mismos autovectores.

Diagonalización de matrices bajo semejanza. Un problema fundamental del álgebra lineal consiste en llevar la matriz A a su forma más simple posible bajo transformaciones de semejanza. Entre los tipos más simples de matrices, fuera de los múltiplos escalares de la matriz unidad, están las matrices diagonales $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. El problema consiste entonces en determinar si una matriz puede ser llevada, vía una transformación de semejanza, a una forma diagonal. Establecemos primero la siguiente definición: Se dice que una matriz A, $n \times n$ sobre el cuerpo K es *diagonalizable* (bajo semejanza) si es semejante a una matriz diagonal D, esto es, si existe una matriz inversible P tal que $D = P^{-1}AP$. La condición *necesaria y suficiente* para que una matriz sea diagonalizable es enunciada a continuación y establece una conexión con el problema de autovalores: Una matriz A de $n \times n$ sobre el cuerpo K es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores linealmente independientes. En tal caso, los elementos diagonales de la matriz diagonal D semejante a A son autovalores de A y la matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ es la matriz cuyas columnas son los correspondientes autovectores de A.

☞ Una condición equivalente para la diagonalización es la siguiente: A es diagonalizable si y solo si para cada autovalor distinto de A su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica.

☞ Una condición suficiente pero *no* necesaria para la diagonalización es la siguiente. Si A tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 10. Determinar si las matrices del **Ejercicio 1** son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar su forma diagonal y una matriz que la diagonaliza.

Ejercicio 11. Mostrar que si A es diagonalizable, $A^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)P^{-1}$.

Ejercicio 12. Calcular $\lim_{k\to\infty} A^k$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. (*Ayuda*: Diagonalice A).

Diagonalización de matrices simétricas bajo semejanza ortogonal. En lo que sigue nos restringiremos al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Dada una matriz A, $n \times n$, diagonalizable, los autovectores de A forman una base de $\mathbb{R}^n$ y la matriz P que diagonaliza a A, cuyas columnas son dichos autovectores, es inversible. Se trata ahora de encontrar una base *ortonormal* de $\mathbb{R}^n$ (con el producto interno canónico) formada por autovectores de A, en cuyo caso, la matriz P que diagonaliza a A será *ortogonal*: $P^{-1} = P^t$. En general, dadas dos matrices A y B, $n \times n$, se dice que B es *ortogonalmente semejante* a A si existe una matriz ortogonal P, tal que $B = P^{-1}AP = P^tAP$. Así pues, nos interesa saber que tipo de matrices reales son ortogonalmente semejantes a una matriz diagonal. El siguiente resultado fundamental nos dice que tales matrices son las *simétricas*: Sea A una matriz real simétrica de orden n. Existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP$ (A es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal). La matriz P tiene por columnas los vectores propios ortogonales normalizados de A y los elementos diagonales de D son los autovalores correspondientes.

☞ Los autovalores de una matriz simétrica real son reales.

☞ Los autovectores de una matriz simétrica real pertenecientes a autovalores distintos son ortogonales respecto al producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

☞ La matriz P proporciona un cambio de base (o transformación de coordenadas) *ortogonal* en $\mathbb{R}^n$ de la base canónica a una base ortonormal constituida por autovectores de A. Toda transformación ortogonal preserva los productos internos y por lo tanto las normas de los vectores de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 13. Diagonalizar, bajo semejanza ortogonal, las siguientes matrices simétricas,

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$