Índice

Capítulo 4

Matrices (repaso)

4.1. Definición de matriz y nomenclatura

Definición. Se llama **matriz** de tamaño $m \times n$ a un conjunto de $m \times n$ números ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) escritos formando un rectángulo de m filas y n columnas. Cada número se llama **elemento de la matriz**.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Para referirnos a una matriz utilizaremos alternativamente la siguiente nomenclatura:

$$A, \quad A^{m\times n}, \quad [a_{ij}]. \tag{4.2}$$

Nos referiremos a un elemento en particular escribiendo

$$[A]_{ij}, \quad a_{ij}. \tag{4.3}$$

Una matriz de una sola columna se denomina **matriz columna** mientras que una de una sola fila se llama **matriz fila**.

4.2. Matrices iguales

Definición. Dos **matrices** $A^{m\times n}$ y $B^{k\times l}$ son **iguales** si tienen la misma forma y son iguales elemento a elemento.

$$A^{m\times n} = B^{k\times l} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = k \\ n = l \\ a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j. \end{cases} \tag{4.4}$$

De la definición queda claro que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

4.3. Suma de matrices

Definición (Suma de matrices). Si A y B son matrices de $m \times n$, la suma $A + B$ está dada por la matriz C, también de $m \times n$, que se obtiene de sumar los correspondientes elementos. Así,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j. \tag{4.6}$$

De la definición se desprende que no pueden sumarse matrices que tiene distinta forma.

4.4. Resta de matrices

Definición. Se llama **inversa aditiva de una matriz A con respecto a la suma**, a la matriz $-A$ que se obtiene de anteponer el signo menos a cada uno de los elementos de A. Así,

$$A = [a_{ij}] \quad \Rightarrow \quad -A = [-a_{ij}], \quad \forall i, j. \tag{4.7}$$

De esta manera, podemos definir la resta entre dos matrices.

Definición. Sean A y B, ambas de $m \times n$, se define la **resta de matrices** $A - B$ como

$$C = A - B = A + (-B), \tag{4.8}$$

donde

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad \forall i, j. \tag{4.9}$$

4.4.1. Propiedades de la suma de matrices

Sean A, B y C matrices de la forma $m \times n$. Entonces,

- $A + B$ es una matriz de $m \times n$ (clausura)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociatividad)
- $A + B = B + A$ (conmutatividad)
- $\exists\, O^{m \times n} / \, A + O = A$ (existencia de elemento neutro)
- Dado A, $\exists - A / \, A + (-A) = O$ (existencia de inverso aditivo)

Noten que estas propiedades son "heredadas" de las propiedades de la suma de escalares, ya que la suma de matrices se define en términos de la suma de escalares.

4.5. Producto de un escalar por una matriz

Definición. El **producto de un escalar α por una matriz** A, denotado por αA o $A\alpha$, está definido por la matriz obtenida de multiplicar cada elemento a_{ij} de A por α:

$$C = \alpha A = A\alpha, \qquad \text{donde} \qquad c_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \quad \forall i, j. \tag{4.10}$$

4.5.1. Propiedades

Sean A y B dos matrices de $m \times n$ y sean α y β escalares. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- αA también es una matriz de $m \times n$ (clausura o ley de cierre)
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (asociatividad)
- $\alpha A = A\alpha$ (conmutatividad)
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividad sobre la adición de matrices)
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividad sobre la adición de escalares)
- Existe el escalar 1 tal que $1A = A$ (existencia del elemento neutro)

Nuevamente, estas propiedades son heredadas de las propiedades de la suma y producto de escalares.

4.6. Matriz transpuesta

Una operación que no es derivada de la aritmética escalar es la transposición.

Definición. Se llama **transpuesta de una matriz** $A^{m\times n}$ a la matriz A^T, con n filas y m columnas, obtenida de intercambiar las filas y columnas de A:

$$\left[A^T\right]_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j. \tag{4.11}$$

Obviamente, para todas las matrices $(A^T)^T = A$.

4.7. Matriz adjunta

En el caso en que la matriz en cuestión tenga elementos complejos, casi siempre la transposición viene acompañada de la conjugación de los elementos. La matriz así obtenida se denomina **matriz adjunta**, y se denota por A^*.

Definición. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se llama **matriz adjunta** a la matriz que tiene los siguientes elementos

$$[A^*]_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad \forall i, j. \tag{4.12}$$

Se cumple que $(A^*)^* = A$. Además, $A^* = A^T$ si A contiene sólo elementos reales.

4.7.1. Propiedades

Si A, B son matrices de $m \times n$, y α un escalar, entonces

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

4.8. Matrices cuadradas

Definición. Decimos que la matriz A, de $m \times n$ es cuadrada si $m = n$.

4.8.1. Matrices cuadradas especiales

- A es simétrica si $A = A^T$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.
- A es antisimétrica si $A = -A^T$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j$.
- A es hermítica si $A = A^*$, es decir, si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j$.
- A es antihermítica si $A = -A^*$, es decir, si $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$, $\forall i, j$.

4.9. Producto entre matrices

Vamos a ver el producto de matrices, con una justificación de su propósito. Para ello necesitamos recordar primero cómo se define una función lineal.

Definición. Decimos que la **función** $\varphi : D \to \mathbb{R}$ es **lineal** si

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in D,$
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \quad \forall x \in D$ y α escalar.

Estas dos condiciones se pueden escribir como una sola. Vamos a demostrar más adelante que una función $\varphi(x)$ es lineal si

$$\varphi(\alpha x + y) = \alpha\varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in D \text{ y } \alpha \text{ escalar.} \tag{4.13}$$

De acuerdo con la definición,

$$\varphi(x) = \gamma x, \tag{4.14}$$

es una función lineal, mientras que

$$\varphi(x) = \gamma x + \delta, \tag{4.15}$$

no lo es. (Veremos la demostración en clase.)

Consideremos ahora dos funciones lineales

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gx_1 + hx_2 \\ ix_1 + kx_2 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

y su composición $\eta = \varphi \circ \psi$

$$\eta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi\left(\psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} gx_1 + hx_2 \\ ix_1 + kx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ag + bi)x_1 + (ah + bk)x_2 \\ (cg + di)x_1 + (ch + dk)x_2 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

que también es una función lineal.

Utilicemos ahora matrices para representar a las funciones lineales

$$\varphi_M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \psi_M = \begin{pmatrix} g & h \\ i & k \end{pmatrix}, \qquad \eta_M = \begin{pmatrix} ag + bi & ah + bk \\ cg + di & ch + dk \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

De aquí surgió la idea de relacionar la composición de funciones con una cierta forma de multiplicar matrices, tal que φ_M por ψ_M dé por resultado η_M:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ i & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + bi & ah + bk \\ cg + di & ch + dk \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

Así, el producto de matrices debe su origen a la representación matricial de la **COMPOSICIÓN** de funciones lineales.

* * *

Consideremos ahora un vector fila de n elementos y un vector columna, también de n elementos:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Definición. El **producto escalar estándar** entre A y B es el escalar obtenido haciendo

$$A \cdot B = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{4.21}$$

Observen que cuando escribimos

$$\varphi_M \, \psi_M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ i & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + bi & ah + bk \\ cg + di & ch + dk \end{pmatrix} = \eta_M, \tag{4.22}$$

el elemento η_{ij} es el producto escalar de la i-ésima fila de φ_M por la j-ésima columna de ψ_M, y de esta forma es que definimos al producto de dos matrices.

Definición. Las **matrices** A y B son **compatibles** para ser multiplicadas en el orden AB siempre que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B, es decir, si A es $m \times p$ y B es $p \times k$.

Definición. Para matrices compatibles $A^{m \times p}$ y $B^{p \times n}$, la **matriz producto** AB es la matriz de tamaño $m \times n$ cuyo elemento ij es el producto de la i-ésima fila de la matriz A por la j-ésima columna de la matriz B:

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \, b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{4.23}$$

Si A y B no son compatibles, el producto AB no está definido.

4.9.1. Propiedades

Sean $A^{m \times p}$, $B^{p \times n}$ y $C = AB$, entonces

- $C_{i*} = A_{i*} B = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} B_{k*}$
- $C_{*j} = AB_{*j} = \sum_{k=1}^{p} A_{*k} b_{kj}$

Estas propiedades nos indican que no es necesario computar toda la matriz C si sólo necesitamos conocer alguna de sus filas o columnas. Otras propiedades:

- $AB \neq BA$, (**el producto de matrices NO ES CONMUTATIVO**)
- $A(B + C) = AB + AC$, (distributivo a izquierda)

- $(D+E)F = DF + EF$, (distributivo a derecha)
- $A(BC) = (AB)C$, (asociativo)
- $AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0.$

  Ejemplo:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$
  Para que esto se cumpla, alcanza con que $a = -c$ y $b = -d$, y no hay necesidad de que $a = b = c = d = 0$. Como consecuencia de esta propiedad **perdemos la ley de cancelación**, como veremos a continuación. Supongamos que estamos trabajando con la ecuación
  $$A(B-C) = 0, \quad \text{con} \quad A \neq 0, \quad \text{y} \quad B - C \neq 0. \tag{4.25}$$
  Noten que
  $$B - C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B \neq C. \tag{4.26}$$
  La ecuación inicial se puede escribir como
  $$AB = AC \tag{4.27}$$
  donde, si canceláramos las A, llegaríamos al absurdo de que $B = C$, cosa que sabemos que no es cierto. Esto significa que hemos perdido la posibilidad de cancelar un mismo factor en ambos miembros. A esto se llama "perder la ley de cancelación". Veamos un ejemplo concreto:
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$
  donde se da que
  $$AB = AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$
  sin que B y C tengan que ser iguales.
- $(AB)^T = B^T A^T$
- Si A y B son complejas, entonces $(AB)^* = B^* A^*$

4.9.2. Linealidad de la multiplicación de matrices

Sea $A^{m\times n}$ y φ la función definida como la multiplicación de matrices
$$\varphi(X^{n\times p}) = AX. \tag{4.30}$$
Entonces, si α es un escalar y X e Y son matrices $n \times p$, tenemos que
$$\varphi(\alpha X + Y) = A(\alpha X + Y) = A\alpha X + AY = \alpha AX + AY = \alpha\varphi(X) + \varphi(Y), \tag{4.31}$$
y vemos que **el producto de matrices es una función lineal**.

4.10. Matriz identidad

Definición. Se llama **matriz identidad** I_n a la matriz de $n \times n$ con unos en la diagonal principal y ceros en los demás elementos.

Para toda matriz $A^{m\times n}$ se cumple que
$$AI_n = A, \qquad I_m A = A. \tag{4.32}$$

4.11. Inversa de una matriz

Definición. Dada una matriz cuadrada $A^{n\times n}$, llamamos **inversa de A** a la matriz $B^{n\times n}$ que satisface

$$AB = I_n, \qquad BA = I_n. \tag{4.33}$$

Denotamos a la matriz B como A^{-1}.

Observaciones

- No todas las matrices cuadradas son invertibles. Las que lo son, son también llamadas **no singulares** y las que no lo son, **singulares**.
- Observen que debido a que $AA^{-1} = A^{-1}A$ quedan excluidas las matrices rectangulares, sólo las cuadradas admiten inversa.
- Aunque no todas las matrices son invertibles, cuando la inversa existe, es **única**. La demostración es muy sencilla. Supongamos que B_1 y B_2 son dos matrices inversas de A, entonces

$$B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2. \tag{4.34}$$

4.11.1. Propiedades de la inversa de una matriz

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A y B son no singulares, entonces AB también lo será.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Las demostraciones de estas propiedades son triviales.

4.12. Ecuaciones matriciales

Definición. Si A es una matriz no singular, entonces existe una única solución para X en la ecuación matricial

$$A^{n\times n}X^{n\times p} = B^{n\times p}. \tag{4.35}$$

Dicha solución es $X = A^{-1}B$.

4.13. Matrices elementales

Definición. Se llaman **matrices elementales** a las matrices cuadradas de la forma

$$I_n - uv^T, \tag{4.36}$$

donde u y v son vectores columna $n \times 1$, tales que $v^Tu \neq 1$.

Propiedad. Las matrices elementales son no singulares y su inversa es

$$(I_n - uv^T)^{-1} = I_n - \frac{uv^T}{v^Tu - 1}. \tag{4.37}$$

Notar que la inversa de una matriz elemental también es una matriz elemental.

Demostración

Para demostrarlo, hacemos el producto

$$
\begin{aligned}
(I_n - uv^T)\left(I_n - \frac{uv^T}{v^Tu-1}\right) &= I_n - \frac{uv^T}{v^Tu-1} - uv^T + \frac{uv^Tuv^T}{v^Tu-1} \\
&= I_n - \frac{uv^T}{v^Tu-1} - uv^T + \frac{u(v^Tu)v^T}{v^Tu-1} \\
&= I_n - \cancel{uv^T} + \frac{\cancel{uv^T}}{\cancel{v^Tu-1}}\cancel{(v^Tu-1)} \\
&= I_n \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Dejamos como tarea demostrar que el producto en el sentido inverso también da I_n.

* * *

Estamos interesados en construir matrices elementales que realicen operaciones elementales por filas (o columnas) de tipo I, II o III. Recordamos las características de cada tipo de operación:

- **Tipo I:** Intercambiar filas (columnas) i y j
- **Tipo II:** Multiplicar la fila (columna) i por un escalar $\alpha \neq 0$
- **Tipo III:** Sumar un múltiplo de la fila (columna) i a la fila (columna) j.

Las matrices elementales pueden construirse a través de operaciones elementales aplicadas a la matriz identidad. Tomemos, por ejemplo, a la siguiente matriz

$$
E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.39)
$$

que puede obtenerse intercambiando las filas 1 y 2 (o las columnas 1 y 2, da lo mismo) de la matriz identidad I_3.

¿Es E_1 una matriz elemental? Sí, porque puede obtenerse haciendo

$$
E_1 = I_3 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.40)
$$

Veamos qué efecto tiene su multiplicación sobre una matriz $A^{3\times 3}$. Multiplicando a izquierda obtenemos

$$
E_1A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (4.41)
$$

mientras que multiplicando a derecha

$$
AE_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (4.42)
$$

Se ve que la multiplicación por izquierda opera sobre la filas, intercambiándolas, mientras que la multiplicación por derecha hace lo propio sobre las columnas. Resulta práctico asociar estos efectos con la forma de la matriz elemental.

La siguiente es una matriz elemental del Tipo II:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

que resulta de multiplicar por α a la segunda fila (columna) de la matriz identidad. Multiplicando por izquierda obtenemos

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \alpha\, a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

mientras que si lo hacemos por derecha

$$A E_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha\, a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha\, a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha\, a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Por último, hacemos las cuentas para una matriz elemental de tipo III

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Multiplicando por izquierda

$$E_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

mientras que por derecha

$$A E_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

Si definimos

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

donde la única fila no nula es la i-ésima, podemos escribir las matrices E_1, E_2 y E_3 anteriores de la siguiente manera:

- $E_1 = I - uu^T$, con $u = e_1 - e_2$,
- $E_2 = I - (1-\alpha) e_2 e_2^T$;
- $E_3 = I + \alpha e_3 e_1^T$.

Constatamos que estas matrices tienen la forma exigida para ser matrices elementales. Noten que dada la forma de las matrices elementales usadas para cada tipo de operación, no es difícil ver que **la inversa de una matriz elemental de cierto tipo también es del mismo tipo**.

4.13.1. Propiedades

(a) Si se multiplica a izquierda una matriz A por una matriz elemental de tipo I, II o III, la operación correspondiente se ejecuta sobre las filas de A.

Demostración

Vamos a realizar la demostración para una matriz elemental de tipo III. Para las demás, la demostración es análoga.

$$(I+\alpha e_j e_i^T)A = A + \alpha e_j A_{i*} = A + \alpha \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{fila j} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{4.50}$$

donde la última matriz sólo tiene elementos no nulos en la j-ésima fila. Vemos que la matriz resultante es la que se obtiene de multiplicar a la fila i de A por α y sumarla a la fila j.

(b) Si se multiplica a derecha, la operación se ejecuta sobre las columnas.

Demostración

Nuevamente, lo vemos para una matriz elemental de tipo III .

$$A(I+\alpha e_j e_i^T) = A + \alpha A_{*j} e_i^T = A + \alpha \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{columna i} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.51}$$

donde la última matriz sólo tiene elementos no nulos en la i-ésima columna. El resultado de la operación equivale a sumarle a la i-ésima columna de A, α veces la j-ésima columna.

* * *

Teorema. Una matriz $A^{n\times n}$ es no singular sí y sólo sí A es el producto de matrices elementales de tipo I, II o III.

Demostración Si A es no singular, entonces el proceso de eliminación de Gauss-Jordan reduce a la matriz

A a la identidad a través de operaciones elementales por fila. Si G_1, G_2,..., G_k son las matrices elementales que corresponden a las operaciones por fila relizadas, entonces

$$G_k \cdots G_2 G_1 A = I, \tag{4.52}$$

por lo que

$$A = G_1^{-1} G_2^{-1} \cdots G_k^{-1}. \tag{4.53}$$

Como la inversa de una matriz elemental también es una matriz elemental del mismo tipo, esto prueba que A es el producto de matrices elementales del tipo I, II o III. Por otra parte, si $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ es un producto de matrices elementales, entonces A debe ser no singular ya que las matrices E_i lo son, y el producto de matrices no singulares también es no singular.

4.14. Equivalencia entre matrices

Definición. Decimos que las **matrices** A y B son **equivalentes** (y lo denotamos $A \sim B$) cuando B puede derivarse de A por una combinación de operaciones elementales por filas y columnas, es decir

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B = PAQ, \tag{4.54}$$

para P y Q no singulares.

Definición. Decimos que A es **equivalente por filas** con B, y lo denotamos $A \overset{\text{filas}}{\sim} B$, si B puede obtenerse de A mediante operaciones elementales por filas. Es decir,

$$A \overset{\text{filas}}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad B = PA, \tag{4.55}$$

con P no singular.

Definición. Decimos que A es **equivalente por columnas** con B, y lo denotamos $A \overset{\text{col}}{\sim} B$, si B puede obtenerse de A mediante operaciones elementales por columnas. Es decir,

$$A \overset{\text{col}}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad B = AQ, \tag{4.56}$$

con Q no singular.

Definición. Decimos que una matriz $A^{m\times n}$ está en forma **escalonada por filas** si verifica:

1. el primer elemento no nulo (por izquierda) de cada fila es un uno,
2. si $i < j$, el primer elemento no nulo de la fila i está a izquierda del de la fila j,
3. las filas nulas, si existen, están en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Definición. Una matriz está en forma **escalonada y reducida** si es escalonada y si los elementos de la columna asociada al primer elemento no nulo de cada fila son nulos.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

Nota: Dada la matriz A, existe una única matriz escalonada y reducida por filas asociada a A, que llamaremos E_A.

Definición. Se llama **rango de una matriz** $A^{m\times n}$ al número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente por filas a A. Denotaremos el rango de una matriz como $r(A)$.