

ANyP, Práctica 11.

Autovalores y autovectores.

Autovalores y autovectores de una matriz.

Sea A una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo K , usualmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Un escalar λ de K es un *autovalor* de A si existe un vector (columna) no nulo $\mathbf{x}$ de K^n tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Todo vector no nulo que satisfaga esta ecuación se llama *autovector* de A asociado al autovalor λ . El conjunto de todos los vectores de K^n tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se llama *espacio propio* asociado al autovalor λ . El conjunto de todos los autovalores *distintos* de A se llama el *espectro* de A .

Los autovalores se llaman también valores propios, valores característicos, raíces características o valores espectrales. Los autovectores se conocen también como vectores propios o vectores característicos. Las palabras autovector y autovalor son las traducciones de las palabras alemanas *Eigenvektor* y *Eigenwert*, y por ésto, suele también encontrarse en la literatura las denominaciones eigenvectores y eigenvalores.

Existe un solo autovalor correspondiente a un autovector dado. En efecto, si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ para cierto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\lambda\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ con lo cual $\lambda = \mu$. Esto justifica la exclusión del vector nulo como autovector, si bien verifica la definición.

El espacio propio asociado a un autovalor λ , tal como se definió, consiste en el conjunto de los autovectores de A asociados a λ y el vector nulo, y constituye un subespacio de K^n .

Los autovalores de A son soluciones de la *ecuación característica*: $\det(A - \lambda I) = 0$ o, equivalentemente, las raíces del *polinomio característico* $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ el cual es un polinomio en λ de grado n con término principal $(-1)^n$ y término independiente $\det A$ ¹.

En virtud de la nota anterior es claro que el cuerpo subyacente K juega un papel fundamental dado que la existencia de autovalores depende de la existencia de raíces de polinomios en K . El *teorema fundamental del álgebra* asegura que cada polinomio de grado n en $\mathbb{C}$ tiene n raíces (reales o complejas, todas distintas o no). Por lo tanto, una matriz cuadrada A de orden n sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ tiene n autovalores, pero en general serán complejos

¹En la literatura puede encontrarse el polinomio característico definido en forma alternativa como $\hat{p}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Es claro que $\hat{p}_A = (-1)^n p_A$, por lo tanto ambos tienen las mismas raíces (y conducen entonces a los mismos autovalores).

y algunos pueden estar repetidos. En particular si los elementos de A son números reales, entonces A puede no tener autovalores reales, y si tiene autovalores complejos entonces éstos deben aparecer en pares conjugados.

Los autovectores correspondientes a un autovalor λ resultan de resolver el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, el cual, por su naturaleza, es indeterminado y por lo tanto las componentes de $\mathbf{x}$ quedan definidas a menos de un factor de proporcionalidad. El espacio propio asociado al autovalor λ no es más que el conjunto solución de este sistema, y una base del mismo puede ser obtenida de la solución encontrada.

La *multiplicidad algebraica* de un autovalor λ de A es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico. La *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente. En general, la multiplicidad geométrica no excede la multiplicidad algebraica.

Autovectores correspondientes a autovalores *distintos* de A son linealmente independientes en K^n .

Ejercicio 1. Sin calcular los autovalores ni los autovectores, determinar cuales de los siguientes vectores son autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{pmatrix},$$

$$(a) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Identifique el autovalor correspondiente para los vectores que sean autovectores.

Ejercicio 2. Considere la siguiente matriz 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene autovalores en $\mathbb{R}$? ¿Y en $\mathbb{C}$?

Ejercicio 3. Determinar la ecuación característica, los autovalores y autovectores, el espectro y el espacio propio correspondiente para cada una de las siguientes matrices,

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Demostrar que los autovalores de toda matriz triangular (ya sea inferior o superior) son los elementos de su diagonal.

Ejercicio 5. Demostrar que el escalar nulo 0 es autovalor de una matriz A si y solo si A es singular (no inversible).

Ejercicio 6. Demostrar que si A es no singular y λ es un autovalor de A con autovector $\mathbf{x}$, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} con autovector $\mathbf{x}$.

Ejercicio 7. Demostrar que si λ es un autovalor de A entonces λ^k es un autovalor de A^k , k entero positivo.

Ejercicio 8. Una matriz cuadrada A es *involutiva* si $A^2 = I$. Mostrar que los autovalores de una matriz involutiva son 1 ó -1.

Ejercicio 9. Una matriz cuadrada A es *idempotente* si $A^2 = A$. Mostrar que los autovalores de una matriz idempotente son 0 ó 1.

Ejercicio 10. Demostrar que si A es una matriz cuadrada, el polinomio característico de A^t es igual al polinomio característico de A .

Ejercicio 11. Sea A una matriz cuadrada 2×2 , mostrar que el polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$.

Ejercicio 12. Mostrar que si $\mathbf{x}$ es un autovector de A entonces el correspondiente autovector puede ser determinado por el *cociente de Rayleigh*,

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}}.$$

Matrices semejantes.

Recordemos la siguiente definición. Dos matrices A y B de $n \times n$ se dicen *semejantes* si existe una matriz P , $n \times n$, no singular tal que $B = P^{-1} A P$. Y se dice que B se obtiene de A por la *transformación de semejanza* $P^{-1} A P$.

Ejercicio 13. Demostrar que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y, en consecuencia, los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica.

Ejercicio 14. Mostrar que, si bien las siguientes matrices tienen los mismos autovalores, no son semejantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que el recíproco del ejercicio anterior no es válido.

Ejercicio 15. Las siguientes dos matrices son semejantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puesto que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia A y B tienen los mismos autovalores. ¿Cuales son sus autovectores? Esto prueba que si bien dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores no necesariamente tienen los mismos autovectores.

Diagonalización de matrices bajo semejanza.

Un problema fundamental del álgebra lineal consiste en llevar la matriz A a su forma más simple posible bajo transformaciones de semejanza. Entre los tipos más simples de matrices, fuera de los múltiplos escalares de la matriz unidad, están las matrices diagonales $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. El problema consiste entonces en determinar si una matriz puede ser llevada, vía una transformación de semejanza, a una forma diagonal.

Establecemos primero la siguiente definición: Se dice que una matriz A , $n \times n$ sobre el cuerpo K es *diagonalizable* (bajo semejanza) si es semejante a una matriz diagonal D , esto es, si existe una matriz inversible P tal que $D = P^{-1} A P$.

La condición *necesaria y suficiente* para que una matriz sea diagonalizable es enunciada a continuación y establece una conexión con el problema de autovalores: Una matriz A de $n \times n$ sobre el cuerpo K es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores linealmente independientes. En tal caso, los elementos diagonales de la matriz diagonal D semejante a A son autovalores de A y la matriz P tal que $D = P^{-1} A P$ es la matriz cuyas columnas son los correspondientes autovectores de A .

Una condición equivalente para la diagonalización es la siguiente: A es diagonalizable si y solo si

para cada autovalor distinto de A su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica.

☞ Sea $S(\lambda_i)$ el espacio propio del autovalor λ_i para cada autovalor $i = 1, \dots, k$ del espectro de A y sea $\mathcal{B}_i$ es una base de dicho espacio. Entonces, si A es diagonalizable, resulta que

$$K^n = S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$$

siendo el conjunto de n elementos $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ una base de K^n . La matriz P que diagonaliza a A es la matriz de cambio de base de la base canónica de K^n a la base $\mathcal{B}$ de K^n formada con los autovectores de A .

☞ Una condición suficiente pero *no* necesaria para la diagonalización es la siguiente. Si A tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 16. Determinar si las matrices del **Ejercicio ??** son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar su forma diagonal y una matriz que la diagonaliza.

Ejercicio 17. Mostrar que si A es diagonalizable, $A^k = P D^k P^{-1} = P \operatorname{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k) P^{-1}$.

Ejercicio 18. Calcular $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$, siendo $A = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$. (Ayuda: Diagonalice A).

Autovalores y autovectores de operadores lineales. Diagonalización.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K , usualmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea T un *operador lineal* sobre V , esto es, una transformación lineal de V en V . Un escalar λ de K es un *autovalor* de T si existe un vector v no nulo de V , llamado *autovector* de T , tal que $T(v) = \lambda v$. El *espacio propio* asociado al autovalor λ es el conjunto de todos los vectores v de V tales que $T(v) = \lambda v$, y es un subespacio de V , a saber, el núcleo del operador lineal $T - \lambda I$, el cual es, pues, un operador lineal singular.

Supongamos ahora que V es de dimensión finita. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$ la representación matricial del operador T en dicha base. Entonces los autovalores de la matriz A son autovalores del operador T y los autovectores de A correspondientes son las coordenadas de los autovectores de T respecto de la base $\mathcal{B}$, y recíprocamente. Esto reduce el problema de los autovalores de un operador lineal sobre un espacio de dimensión finita al problema de autovalores de una matriz.

Se trata ahora de encontrar una base de V tal que la representación matricial de T sea una matriz diagonal. Si tal base existe, se dice que T es *diagonalizable*. El siguiente teorema conecta este problema con el problema de los autovalores: Un operador lineal

T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n es diagonalizable si y solo si existe una base de V tal que cada vector suyo sea un vector propio de T , esto es, si y solo si existen n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, los elementos diagonales de la representación matricial diagonal son los valores propios correspondientes.

☞ La matriz A que representa a T depende de la elección de la base para V , pero los autovalores de T se definieron sin hacer referencia a una base. Ahora bien, dos matrices que representan a T respecto a dos bases cualesquiera de V son semejantes y, por lo tanto, tienen los mismos autovalores. Luego, el procedimiento anterior está justificado.

☞ Sea $S(\lambda_i)$ el espacio propio asociado a cada autovalor distinto λ_i de T y sea $\mathcal{B}_i$ una base del mismo, entonces si T es diagonalizable

$$V = S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$$

siendo el conjunto de n elementos $\cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ una base de V .

☞ El operador lineal T es diagonalizable si y solo si su matriz respecto a cualquier base de V es diagonalizable. Esto reduce el problema de la diagonalización del operador T a la diagonalización de una matriz.

☞ Fijada una base $\mathcal{B}$ de V , la matriz $A = [T]_{\mathcal{B}}$ está ligada a la matriz diagonal D vía una transformación de semejanza: $D = P^{-1} A P$. La matriz P tiene por columnas las componentes de los autovectores respecto de la base $\mathcal{B}$ y es la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base de V formada por los autovectores de T .

Ejercicio 19. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones f reales de variable real que admiten derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto dado. Sea D el *operador derivación* que aplica a cada f en su derivada, $D(f) = f'$. Mostrar que las funciones $f(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \neq 0$ son autovectores de D con autovalor α . ¿Qué puede decir del conjunto $\{e^{\alpha x} : \alpha \neq 0\}$? En situaciones como éstas, en las que V es un espacio funcional, los autovectores suelen llamarse *autofunciones*.

Ejercicio 20. Hallar los autovalores y vectores propios de los siguientes operadores lineales. Determinar si son diagonalizables y, en caso afirmativo, encontrar una representación diagonal y la matriz de cambio de base correspondiente.

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (6x - y, 3x + 2y)$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$

Diagonalización de matrices simétricas bajo semejanza ortogonal.

En lo que sigue nos restringiremos al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Dada una matriz A , $n \times n$, diagonalizable, los autovectores de A forman una base de $\mathbb{R}^n$ y la matriz P que diagonaliza a A , cuyas columnas son dichos autovectores, es invertible. Se trata ahora de encontrar una base *ortonormal* de $\mathbb{R}^n$ (con el producto interno canónico) formada por autovectores de A , en cuyo caso, la matriz P que diagonaliza a A será *ortogonal*: $P^{-1} = P^t$.

En general, dadas dos matrices A y B , $n \times n$, se dice que B es *ortogonalmente semejante* a A si existe una matriz ortogonal P , tal que $B = P^{-1} A P = P^t A P$. Así pues, nos interesa saber que tipo de matrices reales son ortogonalmente semejantes a una matriz diagonal. El siguiente resultado fundamental nos dice que tales matrices son las *simétricas*: Sea A una matriz real simétrica de orden n . Existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1} A P$ (A es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal). La matriz P tiene por columnas los vectores propios ortogonales normalizados de A y los elementos diagonales de D son los autovalores correspondientes.

✎ Los autovalores de una matriz simétrica real son reales.

✎ Los autovectores de una matriz simétrica real pertenecientes a autovalores distintos son ortogonales respecto al producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

✎ La matriz P proporciona un cambio de base (o transformación de coordenadas) *ortogonal* en $\mathbb{R}^n$ de la base canónica a una base ortonormal constituida por autovectores de A . Toda transformación ortogonal preserva los productos internos y por lo tanto las normas de los vectores de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 21. (Optativo). Mostrar que, efectivamente, los autovalores de una matriz simétrica real son reales y que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Ejercicio 22. Diagonalizar, bajo semejanza ortogonal, las siguientes matrices simétricas,

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalización de operadores simétricos en espacios euclídeos.

Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Un operador lineal sobre V se dice *simétrico* si

$$\langle x | T(y) \rangle = \langle T(x) | y \rangle,$$

para vectores cualesquiera x e y de V .

✎ Los autovalores de un operador simétrico son reales y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

✎ Si V es de dimensión finita, la matriz un operador simétrico respecto a una base ortonormal es una matriz simétrica.

✎ Si V es de dimensión finita y T es un operador lineal simétrico sobre V , entonces existe una base ortonormal de V en la que cada vector es un autovector de T .

✎ La diagonalización por semejanza ortogonal de T procede tomando una base ortonormal de V y diagonalizando bajo semejanza ortogonal a la matriz simétrica real A que representa a T en dicha base. La matriz P ortogonal tal que $D = P^{-1} A P$ es la matriz que tiene por columnas las componentes de los autovectores ortonormales de T respecto de la base fijada.

Ejercicio 23. (Optativo). Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico, y sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^4$ dado por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1, x_1, 2x_4)$. Determinar si T es simétrico, y en caso afirmativo, diagonalizarlo bajo semejanza ortogonal. (Ayuda: Representar T en la base canónica de $\mathbb{R}^4$).

Formas cuadráticas.

Una *forma cuadrática* en $\mathbb{R}^n$ es una función q de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ de la forma

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} 2 c_{ij} x_i x_j,$$

donde los c_{ij} son constantes. Se dice que la forma cuadrática está *diagonalizada* si

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i c_{ii} x_i^2,$$

esto es, si q carece de términos con productos cruzados $x_i x_j$ (con $i \neq j$). Toda forma cuadrática puede expresarse de modo único en forma matricial como

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz *simétrica*. En efecto, los elementos de A son $a_{ii} = c_{ii}$, y $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$ para $i \neq j$. Recíprocamente, toda matriz simétrica define una forma cuadrática. Para diagonalizar q recordemos que una matriz real simétrica A es ortogonalmente semejante a la matriz diagonal D cuyos elementos diagonales son sus autovalores λ_i , siendo la matriz ortogonal P

tal que $D = P^{-1} A P = P^t A P$ la matriz que tiene por columnas los autovectores ortogonales normalizados de A . De este modo si consideramos el *cambio de coordenadas ortogonal* $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ logramos diagonalizar q :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{y}) &= (P \mathbf{y})^t A (P \mathbf{y}) = \mathbf{y}^t (P^t A P) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^t D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \end{aligned}$$

Esto muestra, también, que la naturaleza de la forma cuadrática depende de los autovalores de la matriz simétrica que la define.

Ejercicio 24. (Optativo). Dada la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$, $q(x, y) = 13x^2 + 10xy + 13y^2$, encontrar un cambio de coordenadas ortogonal que diagonalice a q . Interprete geométricamente el resultado para la curva en el plano definida por $q(x, y) = 72$.