

ANyP, Práctica 12.

Cálculo numérico de autovalores y autovectores.

Teorema de Gerschgorin.

De acuerdo al teorema de Gerschgorin, los autovalores de una matriz A de $n \times n$ están contenidos en la unión de los círculos del plano complejo $\mathbb{C}$ dados por:

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \quad \text{donde } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Además, la unión de cualesquiera k de estos círculos que no intersecten a los $(n - k)$ restantes, debe contener precisamente k (contando multiplicidades) autovalores.

Ejercicio 1. Utilizar el teorema de Gerschgorin para localizar los autovalores de las siguientes matrices y determinar una cota del *radio espectral* $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$,

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Métodos de factorización.

Los algoritmos que proveen aproximaciones a todos los autovalores de una matriz constan, en general, de tres pasos:

1. Transformar la matriz original (densa) a una forma condensada por transformaciones de semejanza ortogonales (y por lo tanto, con los mismos autovalores). Típicamente, una matriz simétrica es reducida a una matriz tridiagonal, y una matriz general a una *matriz de Hessenberg superior*.
2. Solución del problema de autovalores para la matriz condensada.
3. Obtención de los autovectores de la matriz original aplicando la transformación inversa a los autovectores de la matriz condensada.

Para el paso (1) existen métodos que efectúan la transformación en un número finito de pasos. Para el

paso (2) los *métodos de factorización*, como el método QR, son métodos *iterativos* eficientes para resolver el problema. La utilidad de esta estrategia resulta del hecho de que la manipulación computacional de una matriz condensada requiere de muchas menos operaciones que las correspondientes a una matriz densa.

En vez de programar nuestras propias funciones, utilizaremos funciones definidas en las bibliotecas (library) NumPy (Numerical Python) y SciPy (Scientific Python). Como vimos anteriormente NumPy lo podemos usar para cálculos numéricos básicos y para un manejo eficiente de arreglos, que nos permite realizar operaciones directamente sobre vectores y matrices sin bucles explícitos. SciPy se usa para cálculos científicos avanzados que requieren algoritmos más complejos. Está construida sobre NumPy ampliando su funcionalidad aprovechando la estructura de arreglos y la eficiencia de NumPy

Para matrices en general, con NumPy podemos usar la función `numpy.linalg.eig`, mientras que con SciPy podemos usar `scipy.linalg.eig`.

En particular, en el caso de matrices simétricas (o hermiticas si son complejas), podemos usar `scipy.linalg.eigh`. Notese que hemos agregado la letra *h* a la función que usabamos para matrices en general.

Ejercicio 2. Encontrar aproximaciones para los autovalores de las siguientes matrices simétricas,

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} & \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \text{d)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 3. Encontrar aproximaciones a los autovalores de las siguientes matrices,

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Determinar estimaciones para los au-

tovalores de las siguientes matrices,

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180.01 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

¿Qué puede concluirse de los resultados?

Aplicación a las ecuaciones algebraicas.

Los métodos numéricos para calcular autovalores no involucran al polinomio característico, pues, en general, la resolución de la ecuación característica por algún método numérico para ecuaciones algebraicas

es numéricamente inestable. De hecho, podemos utilizar los métodos numéricos de cálculo de autovalores para obtener los ceros de una ecuación algebraica de la forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ notando que ellos son las raíces del polinomio característico de la siguiente *matriz acompañante*,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Determinar los ceros de la ecuación $2x^5 - 12x^4 + 24x^3 - 24x^2 + 22x - 12 = 0$ utilizando el procedimiento descrito.